PŘÍPRAVY KE CVIČENÍ 21

NEVLASTNÍ INTEGRÁL:

PŘIPOMENUTÍ 1: integrály přes neohraničený interval (definice; poznámka o $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$; obrázky)

PŘIPOMENUTÍ 2: integrály z neohraničených funkcí (definice; poznámka o $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ přes singularitu v bodě c takovém, že $a < c < b$; obrázky)

PŘIPOMENUTÍ 3: *Pro nevlastní integrály platí metoda per partes i substituční metoda.*

PŘÍKLADY 1: Určete hodnoty následujících nevlastních integrálů. *(neohraničená jedna mez)*

a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_2^{\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$

Výsledky:

a) $\frac{1}{2}$ b) ∞ c) ∞ d) 2π e) $2\ln 2$ (nesmí se rozdělit na dva integrály) f) není definován

PŘÍKLADY 2: Určete hodnoty následujících nevlastních integrálů. *(neohraničená funkce v jedné mezi)*

a) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{2-x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ e*) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{3x}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$

Výsledky:

a) ∞ b) 2 c) -1 d) ∞ e) 8

Z dalších příkladů stačí stihnout dva.
PŘÍKLADY 3: Určete hodnoty následujících nevlastních integrálů. *(neohraničené obě meze)*

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$

Výsledky: Zvolíme libovolný bod v intervalu $(-\infty, \infty)$. (Třeba nulu, ale je to jedno.) V něm integrál rozdělíme na součet dvou integrálů.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\infty + \infty =$ není definován

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$

PŘÍKLADY 4: Určete hodnoty následujících nevlastních integrálů. *(neohraničená funkce v obou mezích)*

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Výsledky: Zvolíme libovolný bod v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. (Třeba nulu, ale je to jedno.) V něm integrál rozdělíme na součet dvou integrálů.

$$\text{a)}\quad \int_{-1}^{0} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \pi + \pi = 2\pi$$

PŘÍKLADY 5: Určete hodnoty následujících nevlastních integrálů. *(neohraničená funkce uvnitř)*

$$\text{a)}\quad \int_{0}^{2} \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \text{b*)}\quad \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Výsledky:

$$\text{a)}\quad \int_{0}^{1} \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = -\infty + \infty = \ \text{není definován}$$

$$\text{b)}\quad \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}} + \infty = \infty$$

PŘÍKLADY 6: Určete hodnoty následujících nevlastních integrálů. *(neohraničená funkce i mez)*

$$\text{a)}\quad \int_{2}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x$$

Výsledky: Zvolíme libovolný bod v intervalu $(2, \infty)$. (Třeba číslo 3, ale je to jedno.) V něm integrál rozdělíme na součet dvou integrálů.

$$\text{a)}\quad \int_{2}^{3} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x = (-\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) + \infty = \infty$$