Opakování středoškolské matematiky — materiály pro první cvičení

1. Zjednodušte složené zlomky.

   a) $\dfrac{\frac{15}{12}}{\frac{10}{9}}$, b) $\dfrac{7}{\frac{5}{6}}$, c) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{6}}$, d) $\dfrac{\frac{5}{2}}{3}$, e) $\dfrac{\frac{3}{4}}{25}$, f) $\dfrac{2}{\frac{5}{2}}$, g) $\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$, h) $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{5}{3}}{\frac{2}{5}-6}$,

   i) $\dfrac{\left(\frac{3}{7}-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{8}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)}$, j) $\dfrac{\frac{5}{12}-\left(-\frac{5}{6}\right)-\frac{1}{4}}{3\cdot\frac{4}{9}-\left(-\frac{2}{3}\right)}$, k) $\dfrac{\left(-\frac{4}{14}-\frac{3}{21}\right)\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)}{-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)}$.

2. Zjednodušte a stanovte podmínky, za kterých mají dané výrazy a provedené úpravy smysl.

   a) $\dfrac{2x(x+4)-(x+4)^2}{(x+4)^3}$, b) $\dfrac{3r^2s-6rs}{3r^2s+6rs}$, c) $\dfrac{(m+n)^2}{mn+n^2}$, d) $\dfrac{a^2-ab}{b^2-ab}$,

   e) $\dfrac{(x+y)^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{x-y}{x+y}$, f) $\dfrac{r+3}{r-3}:\dfrac{r^2+3r}{2r^2-18}$, g) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+6a+9}:\dfrac{a^2-b^2}{(a+3)(a-b)}$,

   h) $\dfrac{a^2-25}{a^2+10a+25}\cdot\dfrac{a^2+5a}{7a-35}$.

3. Zjednodušte složené zlomky a stanovte podmínky, za kterých mají dané výrazy a provedené úpravy smysl.

   a) $-\dfrac{\frac{5}{a}}{\frac{10}{b}}$, b) $\dfrac{\frac{4a^2}{x^3}}{6ax}$, c) $\dfrac{-4u}{\frac{2u}{7}}$, d) $\dfrac{\frac{6x}{5y}}{4xy}$, e) $\dfrac{-\frac{1}{3y}}{6xy}$, f) $\dfrac{\frac{2x^2y}{-5z^2}}{4yz}$, g) $\dfrac{-4}{\frac{-7y^2z}{14xy}}$, h) $\dfrac{8xy}{\frac{2y}{4x}}$,

   i) $\dfrac{1}{\frac{24xy}{3z}}$, j) $\dfrac{\frac{2p}{2q^2}}{\frac{8p^4}{15q^6}}$, k) $\dfrac{\frac{9a}{4b}}{\frac{-3a}{b}}$, l) $\dfrac{\frac{18a^2b}{5cd^5}}{\frac{6ab}{5cd^3}}$, m) $\dfrac{p-q}{\frac{p}{q}-\frac{q}{p}}$, n) $\dfrac{r-\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}}$, o) $\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$.

4. Zjednodušte výrazy a stanovte podmínky, za kterých mají dané výrazy a provedené úpravy smysl.

   a) $\dfrac{\frac{(t+7)^2}{3+t}}{\frac{2t+14}{t+3}}$, b) $\dfrac{\frac{t-4}{3t-3}}{\frac{8-2t}{t-1}}$, c) $\dfrac{\frac{t-2}{t+2}}{\frac{t^2-4}{(t+2)^2}}$, d) $\dfrac{\frac{t^2+6t+9}{t-5}}{\frac{t^2-9}{2t-10}}$.

5. Zjednodušte a stanovte podmínky, za kterých mají dané výrazy a provedené úpravy smysl.

   a) $\dfrac{\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}$, b) $\dfrac{\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$, c) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a+b}{a-b}}$, d) $\dfrac{m+1+\frac{1}{m-1}}{1+\frac{1}{m^2-1}}$,

   e) $\dfrac{\frac{k}{k-1}+1}{1-\frac{3k^2}{1-k^2}}$, f) $\dfrac{\frac{1-3a}{a^2-1}-\frac{a}{1-a}}{\frac{2a+4}{a^3+2a^2-a-2}}$, g) $\dfrac{\frac{x^2+xy}{xy-y^2}}{\frac{3xy+3x^2}{y^2-xy}}$.

6. Z dané rovnice vypočtěte neznámou.

   a) $\dfrac{x+2}{3}+1=x-\dfrac{2x+1}{5}$, b) $\dfrac{3+y}{2}-\dfrac{1-y}{5}=\dfrac{5+y}{3}$, c) $\dfrac{8-2z}{3}-2=\dfrac{3z+5}{4}-z+\dfrac{1}{4}$,

   d) $\dfrac{1}{3}\left[(x+5)(x+2)-(x-5)^2\right]=4x-3$, e) $\dfrac{4}{y-3}-\dfrac{1}{y-4}=\dfrac{3}{y-2}$.

7. Vyjádřete z rovnice neznámou uvedenou v závorce.

a) $\{a\},\ v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, b) $\{a\},\ S = \frac{d(a+c)}{2}$, c) $\{d\},\ S = \frac{d(a+c)}{2}$, d) $\{d\},\ \frac{a}{b} = c - d$,
e) $\{b\},\ \frac{a}{b} = c - d$, f) $\{y\},\ \frac{x-y}{c} = b - c$.

8. Z rovnic vyjádřete neznámou x.

a) $\frac{kx}{k+x} = 5$, b) $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, c) $\frac{x-m}{n} + \frac{x-n}{m} = 2$, d) $\frac{ax}{b} - \frac{bx-1}{a} = \frac{1}{b}$.

9. Z rovnic vyjádřete neznámou a.

a) $y - \frac{a}{x} = 3xy^2$, b) $y - \frac{y}{a} = 3xy^2$, c) $y - \frac{y}{x} = 3ay^2$,
d) $2y + (y^2 - 6x)a = 0$, e) $2y + (y^2 - a)x = 0$, f) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{ay}{y^2-1} = 0$.

10. Z rovnic vyjádřete neznámou, která je uvedena v závorce.

a) $\{a\},\ \frac{1}{a} + \frac{1}{f+d} = \frac{1}{f}$, b) $\{\beta\},\ V = V_0[1 + \beta(t - t_0)]$, c) $\{m_2\},\ F = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$,
d) $\{t_1\},\ t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}$.

11. Pro která x je zlomek roven nule?

a) $\frac{x(x-2)(x+3)}{x+4} = 0$, b) $\frac{2x - 4x^2}{x-1} = 0$.

12. Určete, jaké souřadnice má:

a) počátek souřadnic, b) bod, který leží na ose x, c) bod, který leží na ose y,
d) bod, který je souměrný podle osy y s bodem $A = [2, 3]$,
e) bod, který je souměrný podle osy x s bodem $B = [3, -4]$,
f) bod, který je souměrný podle počátku s bodem $C = [-2, 1]$.

13. Do systému souřadnic zakreslete body:

a) $A = [3, 2]$, b) $B = [-1, 3]$, c) $C = [-3, -2]$, d) $D = [1, -4]$, e) $E = [0, -2]$, f) $F = [2, 0]$.

14. Do jednoho obrázku nakreslete přímky zadané lineárními rovnicemi:

a) $y = x,\ y = 2x,\ y = \frac{x}{2}$, b) $y = -x,\ y = -3x,\ y = -\frac{x}{3}$,
c) $y = x - 4,\ y = x + 4,\ y = 2 - x,\ y = -2 - x$, d) $y = 2x + 3,\ y = 3x - 2$,
e) $y + 1 = \frac{3}{2}x,\ y + 3 = \frac{x}{2},\ y + \frac{3}{2} + 1 = 0,\ y = 3 - \frac{x}{2}$, f) $y = 6,\ x = 2,\ y = -3,\ x = -4,\ y = 0$.

15. Napište směrnicový tvar přímky, která prochází body:

a) $A = [1, 0],\ B = [-2, -3]$, b) $P = [0, 3],\ Q = [2, 1]$.

16. Určete souřadnice dvou bodů, kterými prochází graf lineární funkce:

a) $y = \frac{2}{3}x + 4$, b) $y = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$.

17. Určete průsečíky grafů daných funkcí se souřadnicovými osami.

a) $y = 7 - 3x$, b) $y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{2}$.

Výsledky

1. a) $\dfrac{9}{8}$, b) $\dfrac{42}{5}$, c) $\dfrac{4}{7}$, d) $\dfrac{5}{6}$, e) $\dfrac{3}{100}$, f) $\dfrac{4}{5}$, g) $-\dfrac{1}{5}$, h) $\dfrac{4}{21}$, i) 45, j) $\dfrac{1}{2}$, k) $\dfrac{5}{4}$.

2. a) $\dfrac{x-4}{(x+4)^2}$, $x \neq -4$, b) $\dfrac{r-2}{r+2}$, $r, s \neq 0$, $r \neq -2$, c) $\dfrac{(m+n)}{n}$, $n \neq 0$, $m \neq -n$,
 d) $-\dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$, $a \neq b$, e) 1, $x \neq \pm y$, f) $\dfrac{2(r+3)}{r}$, $r \neq 0$, $r \neq \pm 3$,
 g) $\dfrac{a+b}{a+3}$, $a \neq -3$, $a \neq \pm b$, h) $\dfrac{a}{7}$, $a \neq \pm 5$.

3. a) $\dfrac{-b}{2a}$, $a, b \neq 0$, b) $\dfrac{2a}{3x^4}$, $a, x \neq 0$, c) -14, $u \neq 0$, d) $\dfrac{3}{10y^2}$, $x, y \neq 0$,
 e) $\dfrac{-1}{18xy^2}$, $x, y \neq 0$, f) $-\dfrac{x^2}{10z^3}$, $y, z \neq 0$, g) $\dfrac{8x}{yz}$, $x, y, z \neq 0$, h) $16x^2$, $x, y \neq 0$,
 i) $\dfrac{z}{8xy}$, $x, y, z \neq 0$, j) $\dfrac{15q^4}{8p^3}$, $p, q \neq 0$, k) $-\dfrac{3}{4}$, $a, b \neq 0$, l) $\dfrac{3a}{d^2}$, $a, b, c, d \neq 0$,
 m) $\dfrac{pq}{p+q}$, $p, q \neq 0$, $p \neq \pm q$, n) $r+1$, $r \neq 0$, $r \neq 1$, o) $\dfrac{xy}{x+y}$, $x, y \neq 0$, $x \neq -y$.

4. a) $\dfrac{t+7}{2}$, $t \neq -3$, $t \neq -7$, b) $-\dfrac{1}{6}$, $t \neq 1$, $t \neq 4$, c) 1, $t \neq \pm 2$, d) $\dfrac{2(t+3)}{t-3}$, $t \neq \pm 3$, $t \neq 5$.

5. a) 1, $a, b \neq 0$, b) $\dfrac{a+b}{a-b}$, $a, b \neq 0$, $a \neq \pm b$, c) $\dfrac{(a-b)^2}{ab}$, $a, b \neq 0$, $a \neq \pm b$,
 d) $m+1$, $m \neq 0$, $m \neq \pm 1$, e) $\dfrac{1+k}{1+2k}$, $k \neq \pm 1$, $k \neq \pm 1/2$, f) $\dfrac{(a-1)^2}{2}$, $a \neq \pm 1$, $a \neq -2$,
 g) $-\dfrac{1}{3}$, $x, y \neq 0$, $x \neq \pm y$.

6. a) $x = 7$, b) $y = 1$, c) $z = -2$, d) $x = \dfrac{6}{5}$, e) $y = 5$.

7. a) $a = \dfrac{2v}{\sqrt{3}}$, b) $a = \dfrac{2S}{d} - c$, c) $d = \dfrac{2S}{a+c}$, d) $d = c - \dfrac{a}{b}$, e) $b = \dfrac{a}{c-d}$, f) $y = x - bc + c^2$.

8. a) $x = \dfrac{5k}{k-5}$, b) $x = \dfrac{ab}{a+b}$, c) $x = m + n$, d) $x = \dfrac{1}{a+b}$.

9. a) $a = xy(1-3xy)$, b) $a = \dfrac{1}{1-3xy}$, c) $a = \dfrac{x-1}{3xy}$,
 d) $a = \dfrac{2y}{6x-y^2}$, e) $a = y^2 + \dfrac{2y}{x}$, f) $a = \dfrac{(x^2+1)(1-y^2)}{xy}$.

10. a) $a = \dfrac{f(f+d)}{d}$, b) $\beta = \dfrac{1}{t-t_0}\left(\dfrac{V}{V_0} - 1\right)$, c) $m_2 = \dfrac{Fm_1}{m_1 g - F}$, d) $t_1 = \dfrac{t(m_1+m_2) - m_2 t_2}{m_1}$.

11. a) $x = 0$, $x = 2$, $x = -3$, b) $x = 0$, $x = 1/2$.

15. a) $y = x - 1$, b) $y = -x + 3$.

17. a) $[0, 7]$ a $[7/3, 0]$, b) $[0, 3/2]$ a $[15/4, 0]$.

Opakování středoškolské matematiky — materiály pro druhé cvičení

1. Dané výrazy s mocninami zjednodušte. Ve všech příkladech, kde se vyskytuje nějaká proměnná, předpokládejte, že je větší než nula. Příklady, ve kterých se vyskytuje jedna proměnná, resp. čísla, upravte na jednu mocninu. Příklady s více proměnnými upravte tak, aby se ve výsledku každá proměnná objevila pouze jednou.

   a) $2^4 \cdot 2^2 - 2^8 : 2^3$, b) $(2^3)^2 + (3^2)^2$, c) $(-3)^2 \cdot (-2)^3$, d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$,

   e) $(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{5}{6}}$, f) $2^{-3} \cdot (-3)^{-2}$, g) $2^{-3} + 3^{-2} - 4^{-1} + 5^0$, h) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$,

   i) $x^3 \cdot x^4 - x^9 : x^2$, j) $(x^2)^3 + (x^3)^2$, k) $(2 \cdot x^2)^4 - (3 \cdot x^4)^2$, l) $\dfrac{x^3 \cdot (-x)^3}{x \cdot (-x)^{-3}}$,

   m) $\dfrac{4 \cdot x^5 \cdot y^3}{6 \cdot x^3 \cdot y^4} \cdot \dfrac{3 \cdot x^6 \cdot y^2}{2 \cdot x^4 \cdot y^3}$, n) $\left(\dfrac{a-3}{a+3}\right)^{-5} \cdot \dfrac{(a-3)^{11}}{(a^2-9)^5}$.

2. Dané výrazy s odmocninami zjednodušte. Předpokládejte, že proměnná je vždy větší než nula. Příklady, ve kterých se vyskytuje jedna proměnná, upravte na jednu odmocninu. Příklady s více proměnnými upravte tak, aby se ve výsledku každá proměnná objevila pouze jednou.

   a) $\sqrt{250}$, b) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{512}}$, c) $\sqrt[4]{810\,000}$, d) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{8}$,

   e) $\sqrt[6]{81} : \sqrt[15]{27}$, f) $\sqrt[3]{7\sqrt{7}}$, g) $\dfrac{\sqrt[12]{3^{11}}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^3}}$, h) $\sqrt{\dfrac{a^3 \cdot b^4}{c^5}}$,

   i) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{b^6}{a^6}}$, j) $\sqrt{\sqrt[4]{x}} \cdot \sqrt[16]{x^{-2}}$, k) $\sqrt[4]{2\,x^5} \cdot (32\,x)^{-\frac{1}{4}}$, l) $\dfrac{\sqrt{12} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{x}}$,

   m) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{a^{-1} \cdot \sqrt{a}}\right)^{-3}$, n) $\dfrac{\sqrt[3]{r} \cdot \sqrt[8]{s^5}}{(s^{-1})^4 \cdot r^{-\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\dfrac{r}{s}}$.

3. Užitím pravidel pro počítání s logaritmy upravte na jeden logaritmus nebo naopak výraz zlogaritmujte. Předpokládejte, že výrazy s proměnnými mají smysl.

   a) $3 \ln 2 - 2 \ln 1 + \dfrac{1}{2} \ln 4$, b) $\log 1000 - \log 100 + \log 10 - \log 1$, c) $\log 36 - 2 \log 2 - 2 \log 3$,

   d) $\ln 16 + 3 \ln 2 - \ln 64$, e) $\ln \mathrm{e}^2 + \ln \sqrt{\mathrm{e}} - \ln \sqrt{\mathrm{e}^{-1}} - \ln \mathrm{e}^{-2}$, f) $\ln \dfrac{1}{2} + \ln \dfrac{1}{4} - \ln \dfrac{1}{8} + \ln \dfrac{1}{16}$,

   g) $\log 500 - \log 16 - \log 25$, h) $\log 72 - \log 27 - \log 16$,

   i) $\ln(x^3 + 8) - \ln(x^2 - 2x + 4)$, j) $\ln(x-1) + \ln(x+1)^3 - \ln(x^2 - 1)$, k) $\ln \dfrac{x^2\, y^{-3}}{z^4}$,

   l) $\ln \dfrac{\sqrt{x^4}\, \sqrt[6]{y^3}}{\sqrt[3]{z^2}}$, m) $\log \dfrac{(x+1)^2 (x^2 + 3x + 2)}{(x+2)^3}$, n) $\log \sqrt{\dfrac{100^3 x^4}{y^6}}$.

4. Vypočítejte x, víte-li, že dané výrazy mají smysl (odlogaritmujte).

a) $\ln x = \ln a + \ln b - \ln c$,

b) $\log x = \log a^2 - \log b^2 + \log 100$,

c) $\ln x = 2\ln a - 3\ln b + \ln c$,

d) $\ln x = 4(\ln a + 0{,}5\ln b - 0{,}25\ln c)$,

e) $\log x = 3(\log a + \log 10) - (\log b - \log 100)$,

f) $\log x = \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{3}\log b - \frac{1}{4}\log c$,

g) $\ln x = 3\ln r + \ln \pi + 2\ln 2 - \ln 3$,

h) $\ln x = 2\ln \mathrm{e} - 4\ln a + 8\ln \frac{\mathrm{e}}{a}$,

i) $\log x = 2(1 - \log a) - \frac{\log b}{2}$,

j) $\log x = \log \frac{1}{1000} + 2\log a - \log b + 2$,

k) $\ln x = \frac{\ln(a+1)}{2} - \ln(b-1) + 1$,

l) $\ln x = \ln(b^2 - b) - 2\ln(b-1) - \ln b^2$,

m) $\ln x = \frac{1}{2}\ln\sqrt{a-2} - \frac{1}{4}\ln(a^2 - 2a)$,

n) $\ln x = \ln(a^2 - ab) - \ln(ac - bc) + 2\ln c$.

Výsledky

1. a) 32 , b) 145 , c) -72 , d) $-\frac{1}{162}$, e) $3^{-\frac{1}{3}}$, f) $\frac{1}{72}$, g) $\frac{71}{72}$,
   h) 3 , i) 0 , j) $2x^6$, k) $7x^8$, l) x^8, m) $\frac{x^4}{y^2}$, n) $a - 3$.

2. a) $5\sqrt{10}$, b) $\frac{1}{2}$, c) 30 , d) $\sqrt[6]{2^5}$, e) $\sqrt[15]{3^7}$, f) $\sqrt{7}$, g) $\frac{1}{3}$,
   h) $\frac{a\sqrt{a}\cdot b^2}{c^2\sqrt{c}}$, i) $\frac{b}{a}$, j) 1 , k) $\frac{x}{2}$, l) $\frac{2\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{3^5}}$, m) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$, n) $\sqrt[3]{r^4}\cdot\sqrt[8]{s^{33}}$.

3. a) $4\ln 2$, b) 2 , c) 0 , d) $\ln 2$,
   e) 5 , f) $-4\ln 2$, g) $\log\frac{5}{4}$, h) $-\log 6$,
   i) $\ln(x+2)$, j) $2\ln(x+1)$, k) $2\ln x - 3\ln y - 4\ln z$,
   l) $2\ln x + \frac{1}{2}\ln y - \frac{2}{3}\ln z$, m) $3\log(x+1) - 2\log(x+2)$, n) $3 + 2\log x - 3\log y$.

4. a) $x = \frac{ab}{c}$, b) $x = \frac{100a^2}{b^2}$, c) $x = \frac{a^2c}{b^3}$, d) $x = \frac{a^4b^2}{c}$, e) $x = \frac{100\,000\,a^3}{b}$,
   f) $x = \sqrt[12]{\frac{a^6b^4}{c^3}}$, g) $x = \frac{4\pi r^3}{3}$, h) $x = \frac{\mathrm{e}^{10}}{a^{12}}$, i) $x = \frac{100}{a^2\sqrt{b}}$, j) $x = \frac{a^2}{10b}$,
   k) $x = \frac{\mathrm{e}\sqrt{a+1}}{b-1}$, l) $x = \frac{1}{b^2 - b}$, m) $x = \frac{1}{\sqrt[4]{a}}$, n) $x = ac$.

Opakování středoškolské matematiky — materiály pro třetí cvičení

1. Vypočtěte funkční hodnoty funkce $f(x)$ v daných bodech:

   a) $f(x) = (x-3)(x+4),\ x = -5,\ 0,\ 3$,

   b) $f(x) = x^2 - 2x + 5,\ x = -2,\ \frac{1}{2},\ 1-\sqrt{5}$,

   c) $f(x) = \left(2x - 1 + \sqrt{3}\right)\left(2x - 1 - \sqrt{3}\right),\ x = \frac{1-\sqrt{3}}{2},\ 0,\ 3,\ \frac{1}{2} - \sqrt{3}$,

   d) $f(x) = 4x^2 - 4x - 4,\ x = -0{,}6\,;\ -\frac{1}{2}\,;\ \frac{3}{2}\,;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

   e) $f(x) = 8x^2 - 8x + 10,\ x = -1,\ \frac{5}{4}, 2$,

   f) $f(x) = 2x^2 - 8x - 10,\ f(5),\ f(-2),\ f(0),\ f(\pi)$.

2. Nalezněte kořeny daných kvadratických rovnic a rozložte levé strany na součin kořenových činitelů:

   a) $x^2 - 2x = 0$, b) $x^2 + 8x = 0$, c) $10 - 2x^2 = 0$, d) $x^2 - 6x + 9 = 0$,
   e) $5x^2 + 15x - 50 = 0$, f) $10x^2 + 60 - 50x = 0$, g) $4x^2 - 2x - 20 = 0$,
   h) $x^2 + 2\sqrt{5}x + 3 = 0$, i) $-8 + 2x^2 - 4x = 0$, j) $9x + 9x^2 - 9 = 0$.

3. U následujících kvadratických rovnic určete kořeny. Využijte tvaru ve kterém jsou zadané, výrazy neroznásobujte!

   a) $(x-3)(x+4) = 0$, b) $20(x-5)(x+1) = 0$,
   c) $(2x+5)(3x-2) = 0$, d) $(3x+6)^2 = 0$,
   e) $x(7x-5) = 0$, f) $\left(x - 8 + \sqrt{7}\right)\left(x - 8 - \sqrt{7}\right) = 0$,
   g) $\left(2x - 1 + \sqrt{7}\right)\left(2x - 1 - \sqrt{7}\right) = 0$, h) $4\left(x + \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

4. Řešte v reálném oboru rovnice:

   a) $(x-2)^3 = (x+1)^3 + 9(x-5)$, b) $\frac{x+\sqrt{3}}{x} - \frac{2x}{x+\sqrt{3}} = 2$, c) $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{5}{2}$.

5. Nalezněte řešení rovnice:

   a) $\frac{1}{x-6} + \frac{2x}{3(x+3)} = \frac{4x+3}{3(x+3)(x-6)}$ (za předpokladu $x \neq -3, x \neq 6$),
   b) $\frac{1}{x+16} + \frac{2x}{-8(x-8)} = \frac{4x+14}{-8(x-8)(x+16)}$ (za předpokladu $x \neq 8, x \neq -16$),
   c) $\frac{1}{x-2} + \frac{2x}{x+1} = \frac{4x+5}{(x+1)(x-2)}$ (za předpokladu $x \neq -1, x \neq 2$),
   d) $\frac{1}{x-2a} + \frac{2x}{a(x+a)} = \frac{4x-a+6}{a(x+a)(x-2a)}$ (za předpokladu $x \neq -a, x \neq 2a$).

Výsledky

1. a) $f(-5) = 8,\ f(0) = -12,\ f(3) = 0,$

   b) $f(-2) = 13,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4},\ f\left(1-\sqrt{5}\right) = 9,$

   c) $f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 0,\ f(0) = -2, f(3) = 22,\ f\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) = 9,$

   d) $f(-0{,}6) = -0{,}16;\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1;\ f\left(\frac{3}{2}\right) = -1;\ f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0,$

   e) $f(-1) = 26,\ f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{2},\ f(2) = 26,$

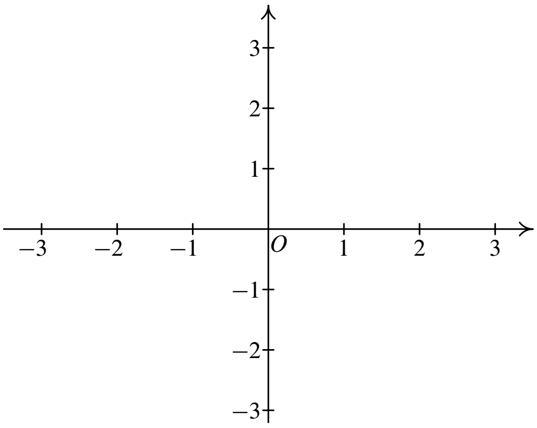
   f) $f(5) = 0,\ f(-2) = 14,\ f(0) = -10,\ f(\pi) = 2\pi^2 - 8\pi - 10.$

2. a) kořeny: $0, 2$; rozklad levé strany: $x(x-2)$,
   b) kořeny: $0, -8$; rozklad levé strany: $x(x+8)$,
   c) kořeny: $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$; rozklad levé strany: $-2\big(x-\sqrt{5}\big)\big(x+\sqrt{5}\big)$,
   d) dvojnásobný kořen: 3; rozklad levé strany: $(x-3)^2$,
   e) kořeny: $2, -5$; rozklad levé strany: $5(x-2)(x+5)$,
   f) kořeny: $3, 2$; rozklad levé strany: $10(x-3)(x-2)$,
   g) kořeny: $\frac{5}{2}, -2$; rozklad levé strany: $4\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+2)$,
   h) kořeny: $-\sqrt{5}+\sqrt{2}, -\sqrt{5}-\sqrt{2}$; rozklad levé strany: $\big(x+\sqrt{5}-\sqrt{2}\big)\big(x+\sqrt{5}+\sqrt{2}\big)$,
   i) kořeny: $1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}$; rozklad levé strany: $2\big(x-1+\sqrt{5}\big)\big(x-1-\sqrt{5}\big)$,
   j) kořeny: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; rozklad levé strany: $9\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

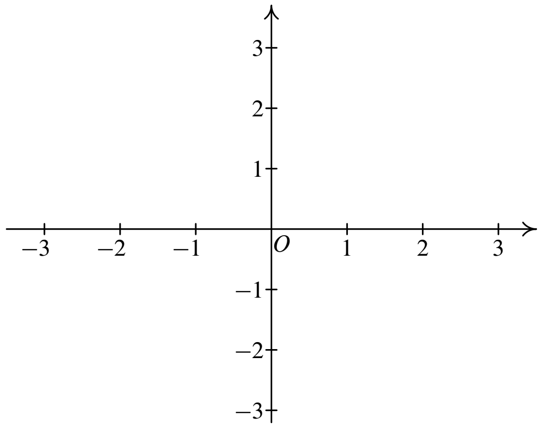
3. a) $x_1 = 3,\ x_2 = -4$, b) $x_1 = 5,\ x_2 = -1$, c) $x_1 = -\frac{5}{2},\ x_2 = \frac{2}{3}$,
   d) $x_{1,2} = -2$, e) $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{5}{7}$, f) $x_1 = 8-\sqrt{7},\ x_2 = 8+\sqrt{7}$,
   g) $x_1 = \frac{1-\sqrt{7}}{2},\ x_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$, h) $x_1 = -\frac{2-\sqrt{3}}{2},\ x_2 = -\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

4. a) $x_1 = 2,\ x_2 = -2$, b) $x_1 = 1,\ x_2 = -1$, c) $x_1 = 0,\ x_2 = 3$.

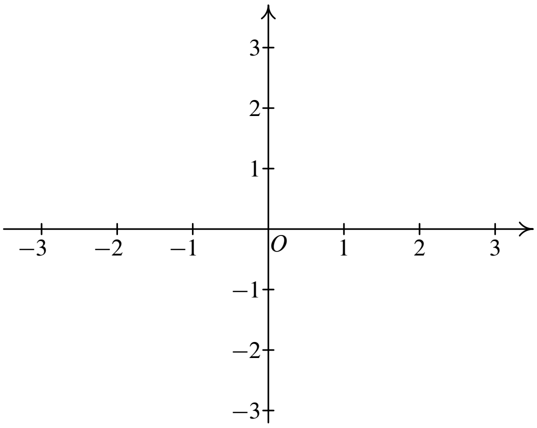
5. a) po úpravě: $2x^2 - 13x + 6 = 0$, diskriminant: $D = 121$, řešení: $x_1 = 6, x_2 = \frac{1}{2}$,
   b) po úpravě: $2x^2 + 20x + 50 = 0$, diskriminant: $D = 0$, řešení: $x_{1,2} = -5$,
   c) po úpravě: $2x^2 - 7x - 4 = 0$, diskriminant: $D = 81$, řešení: $x_1 = 4, x_2 = -\frac{1}{2}$,
   d) po úpravě: $2x^2 - x(3a+4) + (a^2 + a - 6) = 0$, diskriminant: $D = (a+8)^2$,
   řešení: $x_1 = 3 + a, x_2 = -1 + \frac{a}{2}$.



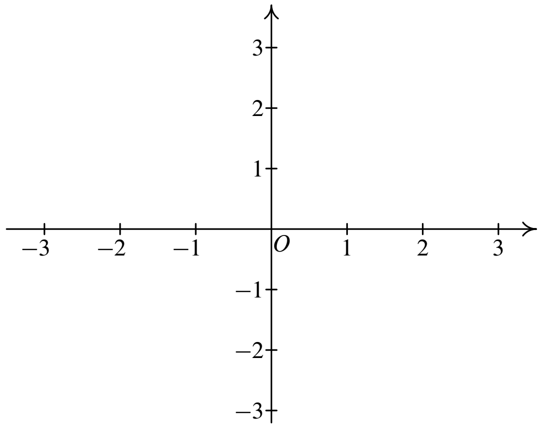
Obr. 1: Graf funkce $y = 2x + 1$



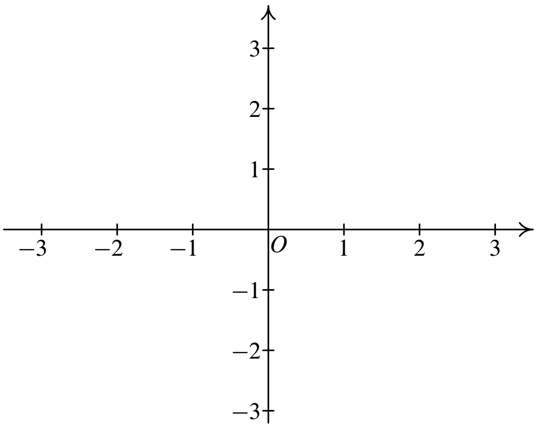
Obr. 2: Graf funkce $y = \ln x$



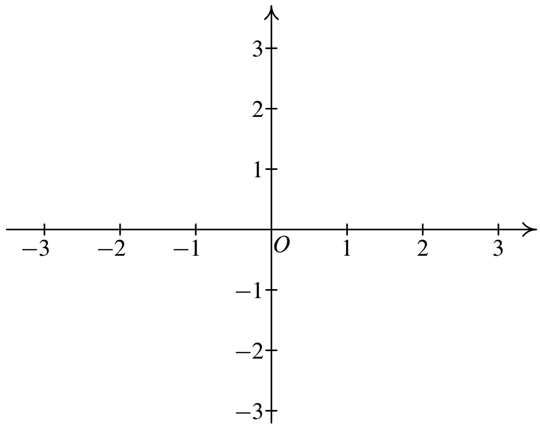
Obr. 3: Graf funkce $y = \mathrm{e}^x$



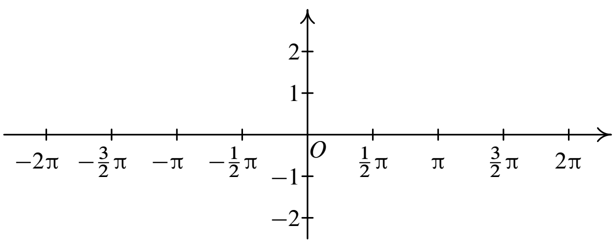
Obr. 4: Graf funkce $y = x^2 + 1$



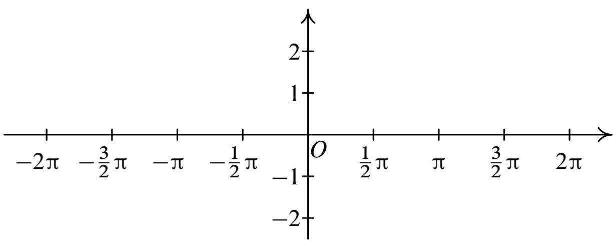
Obr. 5: Graf funkce $y = \sqrt{x}$



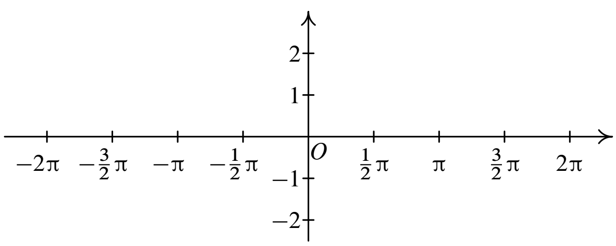
Obr. 6: Graf funkce $y = -\sqrt{x}$



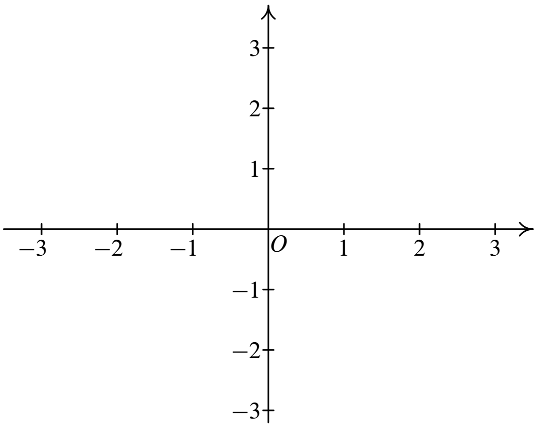
Obr. 7: Grafy funkcí $y = \cos x,\ y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$



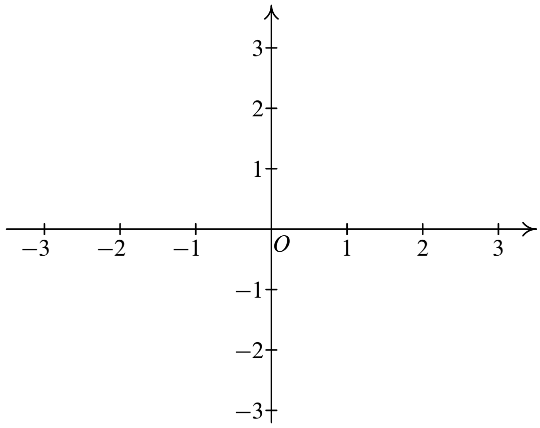
Obr. 8: Grafy funkcí $y = \sin x,\ y = 2\sin x,\ y = \dfrac{1}{2}\sin x$



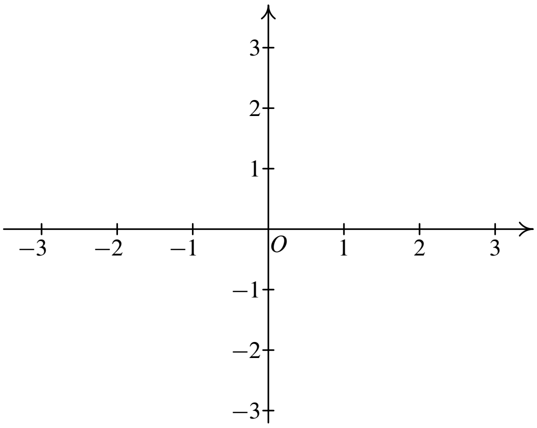
Obr. 9: Grafy funkcí $y = \sin x,\ y = \sin 2x,\ y = \sin \dfrac{x}{2}$



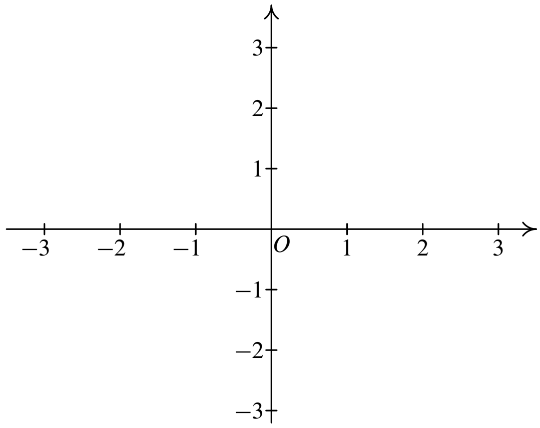
Obr. 10: Graf funkce $y = -x + 2$



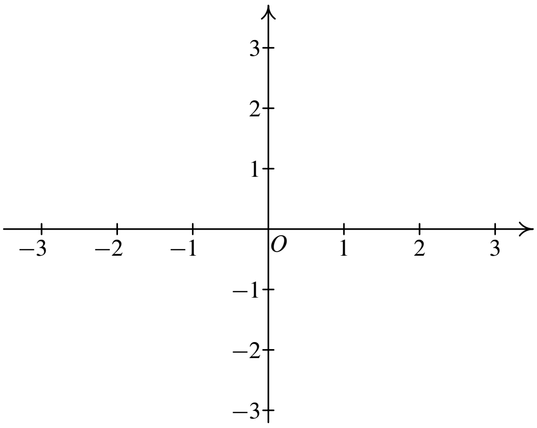
Obr. 11: Graf funkce $y = 1$



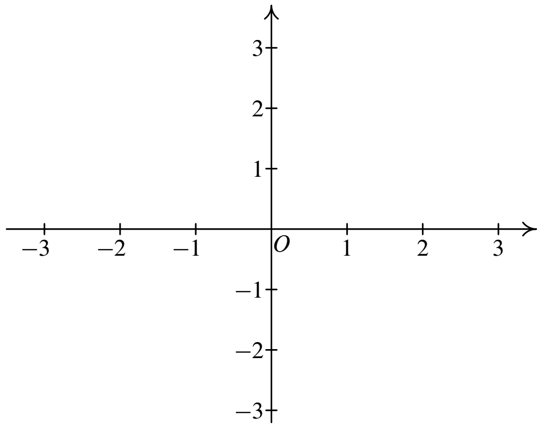
Obr. 12: Graf funkce $y = |x|$



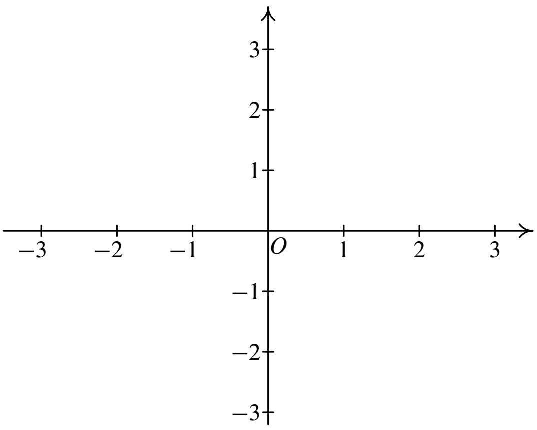
Obr. 13: Graf funkce $y = \mathrm{e}^{-x}$



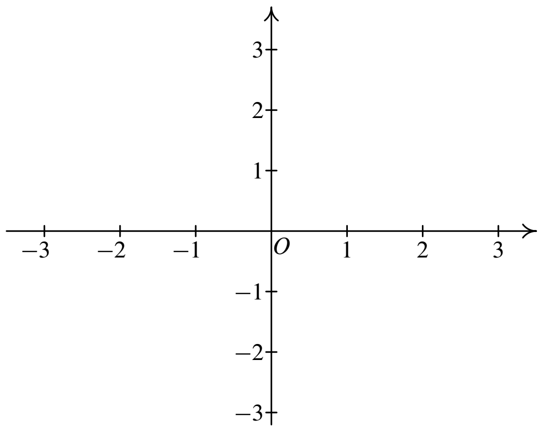
Obr. 14: Nakreslete: $x = y^2$



Obr. 15: Graf funkce $y = -x^2 + 2$



Obr. 16: Nakreslete: $x^2 + y^2 = 4$



Obr. 17: Graf funkce $y = -\ln x$

Opakování středoškolské matematiky — materiály pro čtvrté cvičení

1. Zjednodušte následující komplexní čísla (komplexní čísla zapište ve tvaru $a + b\mathrm{i}$).

   a) $-2 + 7\mathrm{i} + 5 - 2\mathrm{i}$, b) $2\mathrm{i}^2 + 2\mathrm{i}(1 - \mathrm{i})$, c) $\pi\left(\mathrm{i}^3 - 2\mathrm{i}^4\right)$,

   d) $\left(4 + \sqrt{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{\mathrm{i}}{2} - 1\right)$, e) $(-3 - \mathrm{i})^2 + 6(-3 - \mathrm{i}) + 10$, f) $(5 - 3\mathrm{i})(5 + 3\mathrm{i})$,

   g) $\dfrac{2 + 3\mathrm{i}}{7}$, h) $\dfrac{6}{\mathrm{i}}$, i) $\dfrac{2 + 3\mathrm{i}}{3 - \mathrm{i}}$, j) $\dfrac{2\mathrm{i}}{4 - \mathrm{i}} + \dfrac{\mathrm{i} - 2}{1 - 3\mathrm{i}}$.

2. Určete reálnou a imaginární část komplexních čísel $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ a z_1/z_2.

   a) $z_1 = 1 + 10\mathrm{i}, z_2 = 5$, b) $z_1 = 0, z_2 = 7 + 4\mathrm{i}$, c) $z_1 = 4 + \mathrm{i}, z_2 = -2\mathrm{i}$,
   d) $z_1 = 1, z_2 = 2 - 2\mathrm{i}$, e) $z_1 = 10 - 5\mathrm{i}, z_2 = 2\mathrm{i} - 1$, f) $z_1 = 2\mathrm{i} + 1 + \sqrt{2}\mathrm{i}, z_2 = 2(\mathrm{i} - 1) + 3$.

3. U komplexního čísla z určete $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ a absolutní hodnotu $|z|$. Dále určete číslo komplexně sdružené k číslu z (tj. $\overline{z}$) a obě čísla z a $\overline{z}$ zobrazte v Gaussově rovině ($\sqrt{2} \doteq 1{,}4$; $\sqrt{3} \doteq 1{,}7$; $\sqrt{6} \doteq 2{,}4$).

   a) $z = 5\mathrm{i}$, b) $z = -3$, c) $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$,
   d) $z = 3\mathrm{i} - \sqrt{3}$, e) $z = -2 - 2\mathrm{i}$, f) $z = \sqrt{6} - \sqrt{2}\mathrm{i}$.

4. Zjednodušte následující výrazy.

   a) $|(2 + \mathrm{i})(3\mathrm{i} - 1)|$, b) $|(2 + \mathrm{i})(3\mathrm{i} - 1) + 1|$, c) $(2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i}) - |2 + \mathrm{i}|^2 - (2 + \mathrm{i})^2$, d) $\left|\dfrac{2 + \mathrm{i}}{3\mathrm{i} - 1}\right|$.

5. Určete všechna komplexní řešení (kořeny) následujících kvadratických rovnic.

   a) $x^2 - 4 = 0$, b) $x^2 + 4 = 0$, c) $(x - 3)^2 + 4 = 0$, d) $x^2 - 4x + 8 = 0$,
   e) $x^2 + 6x + 10 = 0$, f) $x^2 - 15 = 0$, g) $x^2 + 15 = 0$, h) $x^2 - 4x + 6 = 0$,
   i) $x^2 + 8x + 28 = 0$, j) $4x^2 - 4x + 17 = 0$, k) $9x^2 + 12x + 13 = 0$, l) $2x^2 - 2x + 1 = 0$,
   m) $9x^2 + 6x + 2 = 0$, n) $4x^2 - 32x + 65 = 0$, o) $4x^2 + 24x + 45 = 0$, p) $4x^2 + 4x + 3 = 0$,
   q) $18x^2 - 12x + 11 = 0$.

Výsledky

1. a) $3 + 5\mathrm{i}$, b) $2\mathrm{i}$, c) $-2\pi - \pi\mathrm{i}$, d) $-\dfrac{8 + \sqrt{2}}{2} + (2 - \sqrt{2})\mathrm{i}$,

   e) 0, f) 34, g) $\dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{7}\mathrm{i}$, h) $-6\mathrm{i}$, i) $\dfrac{3}{10} + \dfrac{11}{10}\mathrm{i}$, j) $-\dfrac{21}{34} - \dfrac{1}{34}\mathrm{i}$.

2. a) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 6$, $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = 10$, $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 5$, $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = 50$,
   $\operatorname{Re}(z_1/z_2) = 1/5$, $\operatorname{Im}(z_1/z_2) = 2$,

   b) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 7$, $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = 4$, $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 0$, $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = 0$,
   $\operatorname{Re}(z_1/z_2) = 0$, $\operatorname{Im}(z_1/z_2) = 0$

   c) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 4$, $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = -1$, $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 2$, $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = -8$,
   $\operatorname{Re}(z_1/z_2) = -1/2$, $\operatorname{Im}(z_1/z_2) = 2$,

   d) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 3$, $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = -2$, $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 2$, $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = -2$,
   $\operatorname{Re}(z_1/z_2) = 1/4$, $\operatorname{Im}(z_1/z_2) = 1/4$,

   e) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 9$, $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = -3$, $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 0$, $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = 25$,
   $\operatorname{Re}(z_1/z_2) = -4$, $\operatorname{Im}(z_1/z_2) = -3$,

   f) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 2$, $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = 4 + \sqrt{2}$, $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = -3 - 2\sqrt{2}$, $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = 4 + \sqrt{2}$,
   $\operatorname{Re}(z_1/z_2) = 1 + 2\sqrt{2}/5$, $\operatorname{Im}(z_1/z_2) = \sqrt{2}/5$.

3. a) $\operatorname{Re} z = 0,\ \operatorname{Im} z = 5,\ |z| = 5, \overline{z} = -5\mathrm{i}$,
   b) $\operatorname{Re} z = -3,\ \operatorname{Im} z = 0,\ |z| = 3, \overline{z} = -3$,
   c) $\operatorname{Re} z = \sqrt{3},\ \operatorname{Im} z = 1,\ |z| = 2, \overline{z} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$,
   d) $\operatorname{Re} z = -\sqrt{3},\ \operatorname{Im} z = 3,\ |z| = 2\sqrt{3}, \overline{z} = -\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$,
   e) $\operatorname{Re} z = -2,\ \operatorname{Im} z = -2,\ |z| = 2\sqrt{2}, \overline{z} = -2 + 2\mathrm{i}$,
   f) $\operatorname{Re} z = \sqrt{6},\ \operatorname{Im} z = -\sqrt{2},\ |z| = 2\sqrt{2}, \overline{z} = \sqrt{6} + \sqrt{2}\mathrm{i}$.

4. a) $5\sqrt{2}$, b) $\sqrt{41}$, c) $-3 - 4\mathrm{i}$, d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. a) ± 2, b) $\pm 2\mathrm{i}$, c) $3 \pm 2\mathrm{i}$, d) $2 \pm 2\mathrm{i}$, e) $-3 \pm \mathrm{i}$, f) $\pm\sqrt{15}$,
   g) $\pm\sqrt{15}\mathrm{i}$, h) $2 \pm \sqrt{2}\mathrm{i}$, i) $-4 \pm 2\sqrt{3}\mathrm{i}$, , j) $\dfrac{1}{2} \pm 2\mathrm{i}$, k) $-\dfrac{2}{3} \pm \mathrm{i}$, l) $\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$,
   m) $-\dfrac{1}{3} \pm \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$, n) $4 \pm \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$, o) $-3 \pm \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$, p) $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, q) $\dfrac{1}{3} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.