

Úkol 11

Libovolné 4 příklady z: 1) Vypočtete následující určité integrály.

a) $\int_0^{\pi/3} \sin x \, dx$

b) $\int_0^2 x^3 \, dx$

c) $\int_{-1}^3 (x^3 - 3x^2 + 1) \, dx$

d) $\int_{0,5}^2 \frac{1}{x^2} \, dx$

e) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x-4} \, dx$

f) $\int_{-2}^2 \frac{x^2}{x^2+1} \, dx$

výsledky:

a) $\frac{1}{2}$ b) 4 c) -4 d) $\frac{3}{2}$ e) $\ln 3 - \ln 5$ f) $4 - 2\operatorname{arctg} 2$

Všechny příklady: 2) Vypočtete následující určité integrály.

a) $\int_0^{\pi} x \cos x \, dx$

b) $\int_0^1 e^x(x^2 + 1) \, dx$

výsledky: (*metoda per partes*)

a) $[x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -2$

b) $[(x^2 + 1)e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x \, dx = 2e - 1 - 2 \left([x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx \right) = 2e - 3$

Všechny příklady: 3) Vypočtete následující určité integrály.

a) $\int_2^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \, dx$

b) $\int_1^5 \frac{2 \ln x}{x} \, dx$

výsledky: (*metoda substituce*)

a) $2 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^2}{t-1} \, dt = 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = 6 - 2\sqrt{2} - 2 \ln(\sqrt{2}-1)$ b) $2 \int_0^{\ln 5} t \, dt = \ln^2 5$

GEOMETRICKÉ APLIKACE:

Libovolný 1 příklad z: 4) Určete obsah rovinné plochy ohraničené zadanými křivkami.

a) $y = x^2 - x - 6, y = -x^2 + 5x + 14$

b) $yx = 4, x + y = 5$

výsledky:

a) $\int_{-2}^5 (-2x^2 + 6x + 20) \, dx = \frac{343}{3}$

b) $\int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x} \right) dx = \frac{15}{2} - 8 \ln 2$

Libovolný 1 příklad z: 5) Určete objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu dané funkce f kolem osy x .

a) $f : y = -x^2 + 1$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$

b) $f : y = x^3$ pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$

výsledky:

a) $\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 \, dx = \frac{16\pi}{15}$

b) $\pi \int_0^2 x^6 \, dx = \frac{2^7\pi}{7}$