M1, 4. cvičení na opakování SŠ matematiky:

1) ÚVOD DO KOMPLEXNÍCH ČÍSEL, SČÍTÁNÍ A NÁSOBENÍ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL:

- problém: rovnice

$$x^2 + 1 = 0 \qquad (*)$$

nemá v oboru reálných čísel řešení

- předpokládejme existenci prvku, který je řešením rovnice (*);

symbolem „i" označme prvek takový, že

$$i^2 = -1$$
$$(i \cdot i = -1)$$

prvek i je kořenem rovnice (*):

$$i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

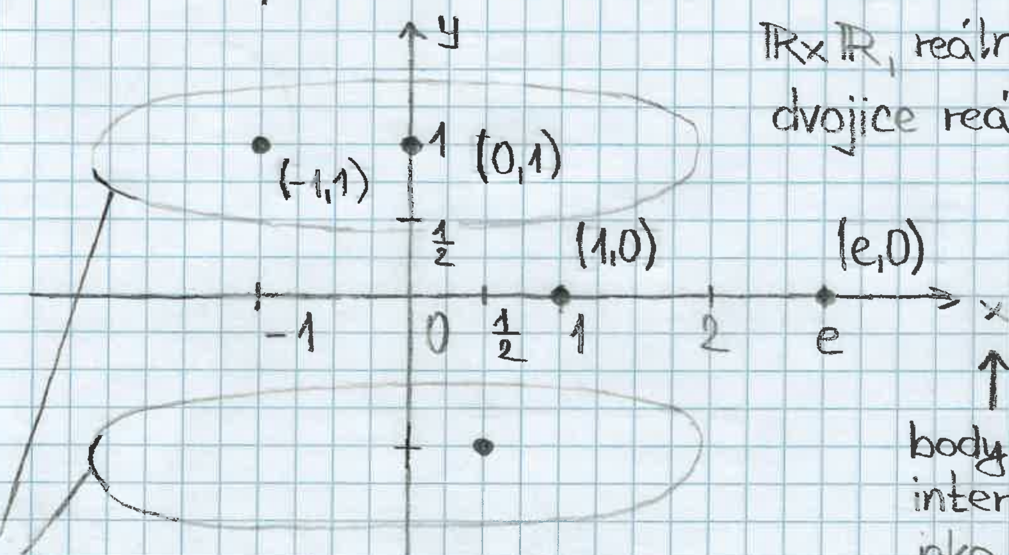
- zkonstruujeme obor čísel obsahující prvek i a všechna reálná čísla, a to tak, aby se zachovalo sčítání a násobení reálných čísel z reálného oboru.

Konstrukce komplexních čísel:

$\mathbb{R}$: reálná čísla můžeme interpretovat jako body na přímce (vyplňují přímku), tzv. reálná osa

$\mathbb{C}$: komplexní čísla budem interpretovat jako body v rovině (na reálné ose už není pro i místo), tzv. komplexní rovina

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, reálná síť, dvojice reálných čísel



body na ose x interpretujeme jako reálná čísla (to je naše reálná osa)

body mimo reálnou osu jsou nově konstruovány (mezi nimi najdeme i)

y

- na dvojicích reálných čísel definujeme operace sčítání a násobení:

$$(x_1, y_1) \underbrace{+}_{\substack{\text{sčítání}\\\text{dvojic (nové)}}} (x_2, y_2) = (x_1 \underbrace{+}_{\text{sčítání reálný čísel}} x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \underbrace{\cdot}_{\text{nové násobení}} (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

→ proč tak škaredé násobení?

$$(0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) =$$

$$= \underbrace{(-1,0)}_{\substack{\text{číslo na ose } x,\\ \text{reálné číslo } -1}}$$

označme $(0,1) = i$, pak

$$i^2 = i \cdot i = -1$$

- ověříme, zda se zachovalo sčítání a násobení reálných čísel:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0+0) = (x_1 + x_2, 0) \checkmark$$

$$(x_1, 0)\cdot(x_2, 0) = (x_1 x_2 - 0\cdot 0, x_1\cdot 0 + 0\cdot x_2) = (x_1 x_2, 0) \checkmark$$

→ číslo $(x,0)$ ztotožníme s reálným číslem x

- množinu všech dvojic reálných čísel s operacemi sčítání a násobení z předešlé strany značíme $\mathbb{C}$ a nazýváme obor komplexních čísel, prvky $\mathbb{C}$ nazýváme komplexní čísla
- komplexní číslo (a,b) můžeme přepsat na tzv. algebraický tvar:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) =$$

$$= \underbrace{(a,0)}_{\text{reálné číslo } a} + \underbrace{(b,0)}_{\text{reálné číslo } b} \cdot \underbrace{(0,1)}_{i} =$$

$$= \underbrace{a + bi}_{\text{algebraický tvar komplexního čísla}}$$

- násobení čísel je snadné:

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_1+y_1 i)(x_2+y_2 i) =$$

$$= x_1x_2 + x_1y_2 i + y_1x_2 i + y_1y_2\underbrace{i^2}_{-1} =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + y_1x_2)$$

- je-li $z \in \mathbb{C}$, pak $z = a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$

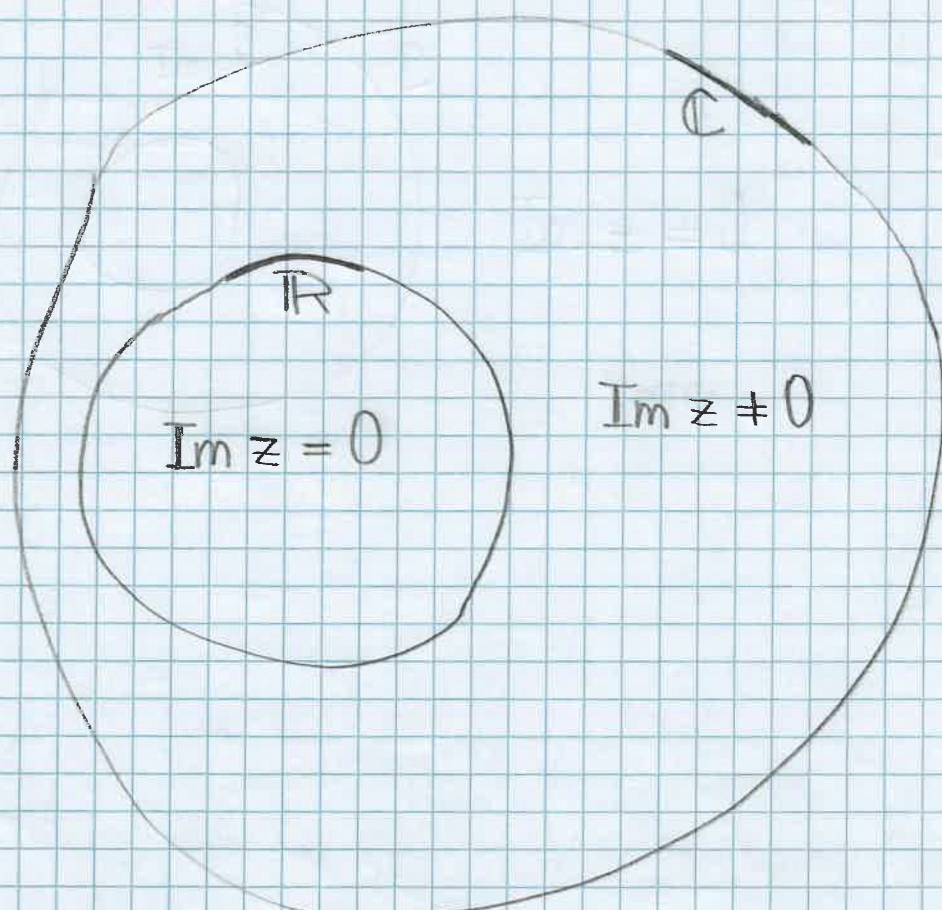
a ... reálná část čísla z, značíme $\mathrm{Re}(z)$, nebo jen $\mathrm{Re}\, z$

b ... imaginární část čísla z, značíme $\mathrm{Im}(z)$, nebo jen $\mathrm{Im}\, z$

$\mathrm{Im}\, z \neq 0$ ... číslo z se nazývá imaginární číslo

$\mathrm{Re}\, z = 0$, $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ ... číslo z se nazývá ryze imaginární číslo

$\mathrm{Im}\, z = 0$ ... číslo z je realné číslo



2) PROCVIČENÍ:

Př. 1. Zjednodušte následující komplexní čísla (komplexní čísla zapište ve tvaru $a+bi$).

a) $-2+7i+5-2i = 3+5i$

b) $2i^2 + 2i(1-i) = 2(-1) + 2i - 2i^2 = \cancel{-2} + 2i \cancel{-2(-1)} = 2i$

f) $(5-3i)(5+3i) = 5^2 - (3i)^2 = 5^2 + 3^2 = 34$

rozklad a^2+b^2

Př. 2. Určete reálnou a imaginární část komplexních čísel z_1+z_2 a $z_1 z_2$.

c) $z_1 = 4+i$, $z_2 = -2i$

$z_1+z_2 = 4+i-2i = 4-i$, $Re(z_1+z_2) = 4$

$Im(z_1+z_2) = -1$

$z_1 z_2 = (4+i)(-2i) = -8i-2i^2 = 2-8i$

$Re(z_1 z_2) = 2$, $Im(z_1 z_2) = -8$

e) $z_1 = 10-5i$, $z_2 = 2i-1$

$z_1+z_2 = 10-5i+2i-1 = 9-3i$, $Re(z_1+z_2) = 9$

$Im(z_1+z_2) = -3$

$z_1 z_2 = (10-5i)(2i-1) = 20i-10-10i^2+5i = 25i$

$Re(z_1 z_2) = 0$

$Im(z_1 z_2) = 25$

3) DĚLENÍ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL; KOMPLEXNÍ ČÍSLA SDRUŽENÁ; ABSOLUTNÍ HODNOTA KOMPLEXNÍHO ČÍSLA; GEOMETRICKÉ ZNÁZORNĚNÍ K. ČÍSEL:

- Komplexní číslo sdružené s číslem $a+bi$ je číslo $a-bi$. Sdružené komplexní číslo s číslem z značíme $\overline{z}$.

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad z = a+bi, \quad \overline{z} = a-bi, \quad \overline{(\overline{z})} = a+bi = z$$

$$z = a+bi: \quad z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 =$$
$$= a^2+b^2 \geq 0$$

$z\overline{z}$ je reálné! a nezáporné!

- $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ \exists! \ z' \in \mathbb{C}$ takové, že $z \cdot z' = 1$
  - je-li $z = a+bi$, pak $z' = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$
  - číslo z' značíme $\frac{1}{z}$, a pokládáme

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \quad (\Delta) \qquad \text{pro } z_2 \neq 0$$

  - výpočet čísla $\frac{z_1}{z_2}$ (jednodušší než ze vztahu (Δ)):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{\underbrace{(z_2 \cdot \overline{z_2})}_{\text{reálné!}}} = \frac{a+bi}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} i$$

$z_2\overline{z_2} = 0 \Leftrightarrow z_2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = Re(z_1\overline{z_2}), \ b = Im(z_1\overline{z_2}), \\ c = z_2\overline{z_2} \end{array} \right.$$

- $z = a + bi$: $z\bar{z} = a^2 + b^2$ je nezáporné a reálné

absolutní hodnota čísla z:

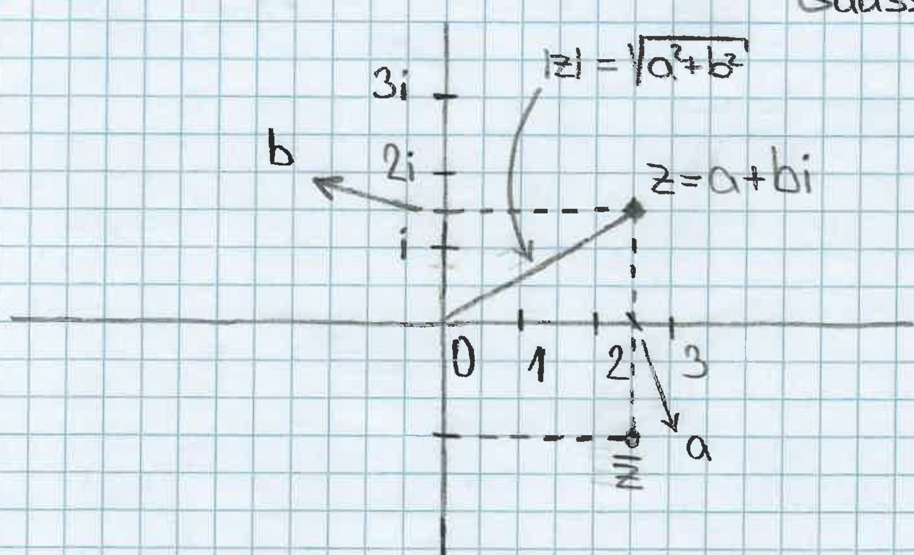
$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

- vlastnosti:

1) $|z|^2 = z\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$
2) $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $z = a+bi \in \mathbb{C}$
3) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$
4) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- geometrické znázornění:

Gaussova rovina



4) PROCVIČENÍ:

Př. 1. (pokračování)

g) $\frac{2+3i}{7} = \frac{2}{7} + \frac{3}{7}i$

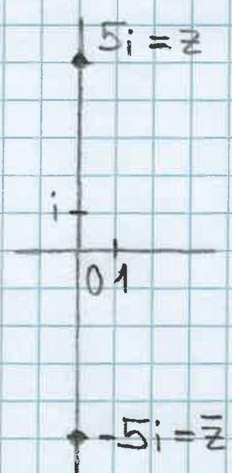
h) $\frac{6}{i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = \frac{-6i}{-i^2} = -6i$ $\quad \frac{6}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{6i}{i^2} = \frac{6i}{-1} = -6i$ ✓

i) $\frac{2+3i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{6+2i+9i+3i^2}{9-i^2} = \frac{3+11i}{10} =$

$= \frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$

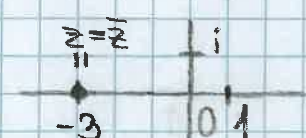
Př. 3. U komplexního čísla z určete Re z, Im z a |z|. Dále určete $\bar{z}$ a obě čísla z a $\bar{z}$ zobrazte v Gaussově rovině.

a) $z = 5i$, $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 5$, $|z| = \sqrt{0^2+5^2} = 5$, $\bar{z} = -5i$



b) $z = -3$, $\operatorname{Re} z = -3$, $\operatorname{Im} z = 0$,

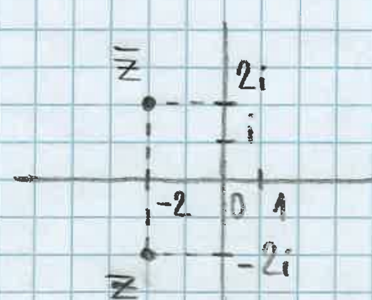
$|z| = \sqrt{(-3)^2+0^2} = 3$, $\bar{z} = -3$



e) $z = -2-2i$, $\operatorname{Re} z = -2$, $\operatorname{Im} z = -2$,

$|z| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$,

$\bar{z} = -2+2i$



Př. 4. Zjednodušte následující výrazy.

a) $|(2+i)(3i-1)| = |2+i|\cdot|3i-1| = \sqrt{4+1}\cdot\sqrt{1+9} = \sqrt{50} =$
$$= \sqrt{2\cdot 25} = 5\sqrt{2}$$

c) $(2+i)(2-i) - |2+i|^2 - (2+i)^2 = -(2+i)^2 =$
$$= -(4+4i+i^2) = -(3+4i) = -3-4i$$

5) KVADRATICKÉ ROVNICE (pokračování):

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

$D = b^2 - 4ac < 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\overbrace{\sqrt{4ac-b^2}}^{\sqrt{-D}}}{2a}$$

Př. 5.

a) $x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = 0, \quad x_{1,2} = \pm 2$

b) $x^2 + 4 = x^2 - 4(-1) = x^2 - 4i^2 = (x-2i)(x+2i), \quad x_{1,2} \pm 2i$

c) $(x-3)^2 + 4 = (x-3)^2 - 4i^2 = (x-3-2i)(x-3+2i),$
$$x_{1,2} = 3 \pm 2i$$

d) $x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 - 4 + 8 = (x-2)^2 - 4i^2 =$
$$= (x-2-2i)(x-2+2i), \quad x_{1,2} = 2 \pm 2i$$

j) $4x^2 - 4x + 17 = 4\left(x^2 - x + \frac{17}{4}\right) = 4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{17}{4}\right) =$
$$= 4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 4i^2\right) = 4\left(x-\frac{1}{2}-2i\right)\left(x-\frac{1}{2}+2i\right), \quad x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm 2i$$