Domácí úloha z plošného integrálu I. druhu

1) Vypočítejte integrál

$$\iint_S 24xz \, \mathrm{d}S,$$

kde S je část roviny o rovnici $x + y + z = 1$ v prvním oktantu. (Tedy $0 < x, 0 < y, 0 < z$).

2) Vypočítejte hmotnost plochy $z = x^2 + y^2$, která má hustotu $\sigma = 6$ a je omezena nerovností $x^2 + y^2 \leq 9$.
nápověda: při integraci použijte substituci $t = 4\varrho^2 + 1$.

3) Vypočítejte integrál

$$\iint_S x \, \mathrm{d}S,$$

kde S je část kulové ploch o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v prvním oktantu, (tedy $x > 0, y > 0, z > 0$).

4) Pro plochu S: $z = \sqrt{4 - y^2}$, která má hustotu $\sigma = 1$ a je omezena nerovnostmi $0 \leq x \leq 3$, $-2 \leq y \leq 2$ vypočítejte:

a) hmotnost,

b) statický moment M_{xy},

c) statický moment M_{xz},

d) statický moment M_{yz},

e) souřadnice těžiště $T = [T_x, T_y, T_z]$,

f) moment setrvačnosti J_x,

g) moment setrvačnosti J_y.

Řešení:

1) Rovnice plochy S: $z = 1 - x - y$, normála: $\vec{n} = (-1, -1, 1)$, $\mathrm{d}S = \sqrt{3} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$\iint_S 24xz \, \mathrm{d}S = \iint_D 24x(1 - x - y) \, |\vec{n}| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D 24x(1 - x - y) \sqrt{3} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Popis půdorysu: z podmínky $0 < z$ dostáváme podmínku $y < 1 - x$ a tedy půdorys plochy je trojúhelník vymezený nerovnostmi: $0 < x < 1, 0 < y < 1 - x$. Pak $\iint_S 24xz \, \mathrm{d}S = \iint_D 24x(1 - x - y) \sqrt{3} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 24 \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1 - x - y)\sqrt{3}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \sqrt{3}$.

2) Rovnice plochy S: $z = x^2 + y^2$, normála: $\vec{n} = (-2x, -2y, 1)$, $\mathrm{d}S = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$M = \iint_S \sigma \, \mathrm{d}S = \iint_D 6|\vec{n}|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D 6 \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Půdorys plochy je kružnice se středem v počátku a poloměru 3, popsaná v polárních souřadnicích nerovnostmi: $0 < \varrho < 3, 0 < \varphi < 2\pi$, $J = \varrho$.
Potom $M = 6\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^3 \varrho\sqrt{4\varrho^2+1}\mathrm{d}\varrho = \pi(37\sqrt{37}-1)$.

3) Rovnice plochy S: $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, normála: $\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right)$ a $\mathrm{d}S = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$\iint_S x\,\mathrm{d}S = \iint_D x|\vec{n}|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Popis půdorysu: z podmínky na nezápornost výrazu pod odmocninou a omezení na první oktanat dostáváme čtvrtinu kruhu vymezenou nerovnostmi $x^2+y^2 < 1$, $x > 0, y > 0$. V polárních souřadnicích je popsána nerovnostmi: $0 < \varrho < 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $J = \varrho$. Potom $\iint_S x\,\mathrm{d}S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \frac{\varrho^2}{\sqrt{1-\varrho^2}}\mathrm{d}\varrho = \frac{\pi}{4}$ (S využitím vzorců, které jsem Vám rozdal)

4) Rovnice plochy S: $z = \sqrt{4-y^2}$, normála: $\vec{n} = \left(0, \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}, 1\right)$ a $\mathrm{d}S = \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
Popis půdorysu: jedná se o obdélník vymezený nerovnostmi $0 \le x \le 3$, $-2 \le y \le 2$.

a) $M = \iint_S \sigma\,\mathrm{d}S = \iint_D 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^2 \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}y \int_0^3 1\,\mathrm{d}x = 6\pi$. (Integrál $\int_{-2}^2 \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}y$ je nevlastní - v krajních bodech pro $y = \pm 2$ dělíme nulou. My ale víme že konverguje, proto jej můžeme počítat stejným způsobem jak jste zvyklí - použijete vzorečky, které jsem Vám rozdal a normálně dosadíte meze.)

b) $M_{yz} = \iint_S x\sigma\,\mathrm{d}S = \iint_D \frac{2x}{\sqrt{4-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^2 \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}y \int_0^3 x\,\mathrm{d}x = 9\pi$,

c) $M_{xz} = \iint_S y\sigma\,\mathrm{d}S = \iint_D \frac{2y}{\sqrt{4-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^2 \frac{2y}{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}y \int_0^3 1\,\mathrm{d}x = 0$,

d) $M_{xy} = \iint_S z\sigma\,\mathrm{d}S = \iint_D 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-2}^2 1\mathrm{d}y \int_0^3 1\,\mathrm{d}x = 24$,

e) $T = [\frac{3}{2}, 0, \frac{4}{\pi}]$.

f) $J_x = \iint_S (y^2+z^2)\sigma\,\mathrm{d}S = \iint_D \frac{8}{\sqrt{4-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 8\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}y \int_0^3 1\,\mathrm{d}x = 24\pi$,

g) $J_y = \iint_S (x^2+z^2)\sigma\,\mathrm{d}S = \iint_D (x^2+4-y^2)\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-2}^2 \int_0^3 (x^2\frac{2}{\sqrt{4-y^2}} + \sqrt{4-y^2})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 30\pi$.