Pomůcka pro přednášku: 1. semestr Bc studia

Lokální a globální extrémy funkcí

Extrémy funkcí

Lokální extrémy

Př. 1 Nalezněte lokální extrémy a nakreslete graf funkce $f(x) = xe^x$.

```
> f:=x->x*exp(x);
```

$$f := x \rightarrow x\, e^x$$

Danou funkci zderivujeme a určíme stacionární body a body, ve kterých neexistuje první derivace.

```
> D(f);
```

$$x \rightarrow e^x + x\, e^x$$

Derivace existuje ve všech bodech. Funkce $e^x > 0$ pro každé *x*.Řešením je jediný stacionární bod.

```
> solve(D(f)(x)=0,x);
```

$$-1$$

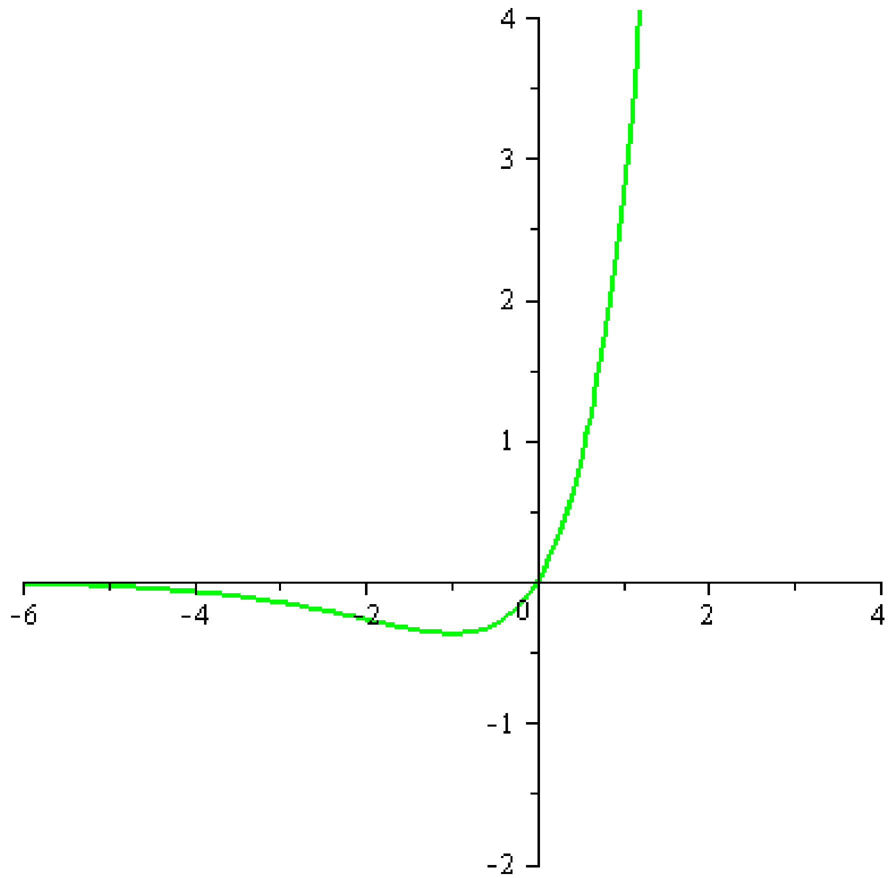
Určme funkční hodnotu v daném bodě.

```
> f(-1);
```

$$-e^{-1}$$

O jaký typ extrému se jedná můžeme určit z grafu funkce, nebo pomocí znaménka druhé derivace.

```
> plot(f,-6..4,-2..4,color=green,thickness=2);
```



```
> D(D(f));
```

$$x \to 2\,e^x + x\,e^x$$

```
> D(D(f))(-1);
```

$$e^{-1}$$

Hodnota druhé derivace je kladná, v daném bodě nastane lokální minimum.

Př. 2 Nalezněte lokální extrémy a nakreslete graf funkce $f(x) = x^2 e^x$.

```
> f:=x->x^2*exp(x);
```

$$f := x \to x^2\,e^x$$

Danou funkci zderivujeme a určíme stacionární body a body, ve kterých neexistuje první derivace.

```
> D(f);
```

$$x \to 2\,x\,e^x + x^2\,e^x$$

Derivace existuje ve všech bodech. Funkce $e^x > 0$ pro každé x.Řešením jsou dva stacionární body.

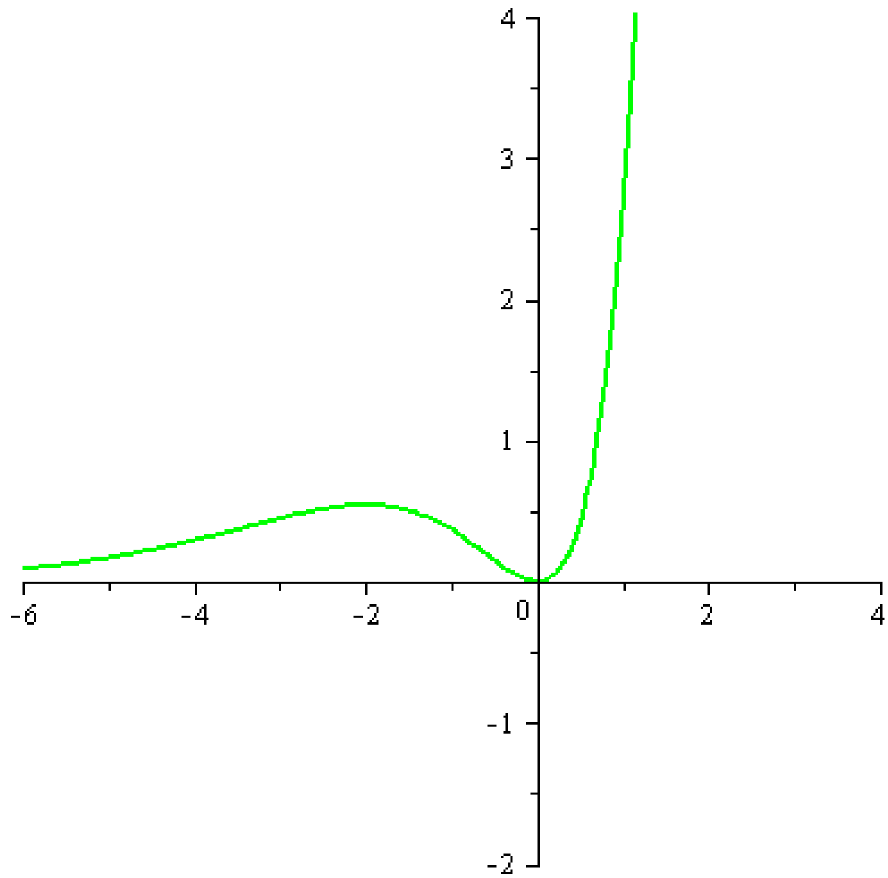
```
> solve(D(f)(x)=0,x);
```

$$0,\ -2$$

```
> f(0),f(-2);
```

$$0,\ 4\,e^{-2}$$

```
> plot(f,-6..4,-2..4,color=green,thickness=2);
```




```
> D(D(f));
```

$$x \to 2\,e^x + 4\,x\,e^x + x^2\,e^x$$

```
> D(D(f))(0);
```

$$2$$

```
> D(D(f))(-2);
```

$$-2\,e^{-2}$$

V bodě 0 je druhá derivace kladná, tudíž zde nastává lokální minimum. V bodě -2 je druhá derivace záporná, tedy zde nastane lokální maximum.

Př. 3 Nalezněte lokální extrémy a nakreslete graf funkce $f(x) = \cos^2 x - 2\sin x, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

```
> f:=x->cos(x)^2-2*sin(x);
```

$$f := x \to \cos(x)^2 - 2\sin(x)$$

Danou funkci zderivujeme a určíme stacionární body.

```
> D(f);
```

$$x \to -2\cos(x)\sin(x) - 2\cos(x)$$

Derivace existuje ve všech bodech daného intervalu.Řešením jsou dva stacionární body.

```
> solve(D(f)(x)=0,x);
```

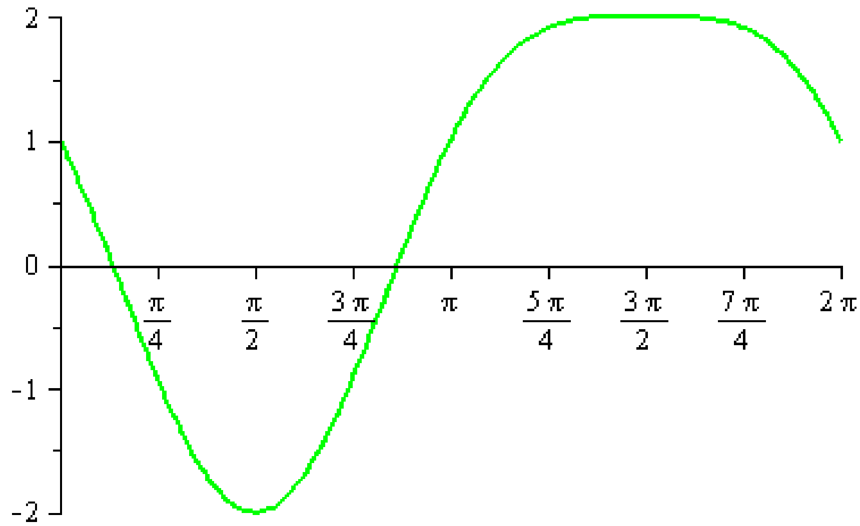
$$\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi$$

Bod $x = -\frac{1}{2}\pi$ nepatří do definičního oboru, ale daná funkce je periodická s periodou 2π, tedy druhý stacionární bod má hodnotu $x = \frac{3}{2}\pi$.

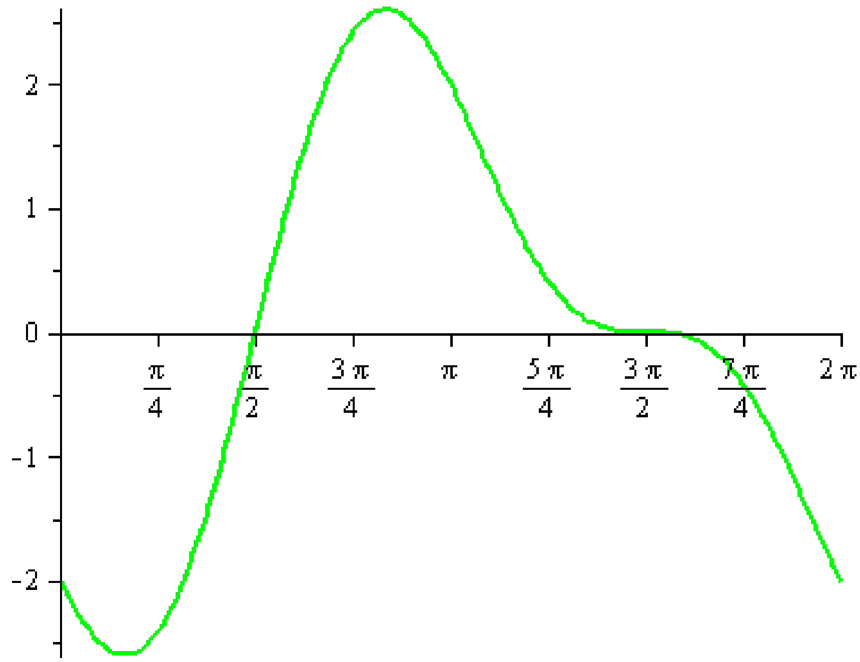
```
> f(Pi/2),f(3*Pi/2);
```

$$-2, 2$$

```
>
plot(f,0..2*Pi,color=green,thickness=2,scaling=constrained,tickma
rks = [spacing(Pi/4), default]);
```




```
>
plot(D(f),0..2*Pi,color=green,thickness=2,scaling=constrained,tic
kmarks = [spacing(Pi/4), default]);
```




```
> D(D(f));
```

$$x \to 2\sin(x)^2 - 2\cos(x)^2 + 2\sin(x)$$

```
> D(D(f))(Pi/2);
```

$$4$$

```
> D(D(f))(3*Pi/2);
```

$$0$$

```
> D(D(D(f)))(3*Pi/2);
```

$$0$$

```
> (D@@4)(f)(3*Pi/2);
```

$$-6$$

V bodě $\frac{\pi}{2}$ je druhá derivace kladná, tudíž zde nastane lokální minimum. V bodě $\frac{3\pi}{2}$ nastane lokální maximum. Z grafu dané funkce to není zcela zřejmé, výsledek lze získat pomocí znaménkových změn první derivace v okolí tohoto bodu. Stejně tak nám nepomůže určení hodnoty druhé derivace v daném bodě, protože je nulová. Museli bychom počítat vyšší derivace do té doby, dokud nevyjde některá z nich nenulová, podle řádu derivace pak lze rozhodnout o typu extrému.

```
>
>
```

Globální extrémy

Př. 1 Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + 24$ na intervalu $\langle -3, 3\rangle$.
Určíme stacionární body.

```
> f:=x->3*x^4-4*x^3-24*x^2+48*x+24;
```

$$f := x \to 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + 24$$

```
> D(f);
```

$$x \to 12x^3 - 12x^2 - 48x + 48$$

```
> solve(D(f)(x)=0,x);
```

$$1, 2, -2$$

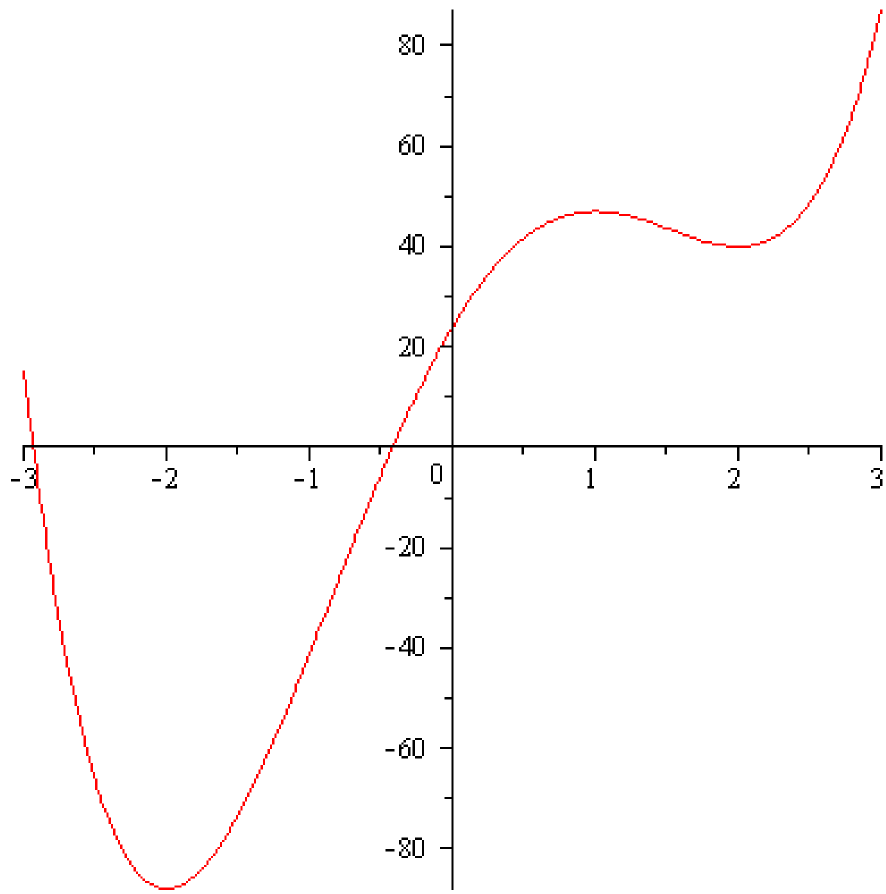
Vypočteme funkční hodnotu ve stacionárních bodech a v krajních bodech intervalu. Ze získaných hodnot vybereme tu nejmenší, v daném bodě nastane globální minimum a největší, v daném bodě nastane globální maximum.

```
> (f(1),f(2),f(-2),f(-3),f(3));
```

$$47, 40, -88, 15, 87$$

Globální maximum nastává v bodě $x = 3$, globální minimum nastává v bodě $x = -2$.
Zobrazíme funkci $f(x)$ na intervalu $\langle -3, 3\rangle$.

```
> plot(f,-3..3);
```



Pro nalezení globálních extrémů lze použít příkazy "maximize" a "minimize". Po přidání parametru location dostaneme nejenom funkční hodnotu globálního extrému, ale také bod, ve kterém tento extrém nastává.

```
> f:=3*x^4-4*x^3-24*x^2+48*x+24;
```

$$f := 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + 24$$

```
> maximize(f,x,x=-3..3,location);
```

$$87, \{[\{x=3\}, 87]\}$$

```
> minimize(f,x,x=-3..3,location);
```

$$-88, \{[\{x=-2\}, -88]\}$$

Př. 2 Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = 4x - 3x^{\frac{2}{3}} - 2$ na intervalu $\langle -1, 2\rangle$.
Nejprve určíme stacionární body a body ve kterých neexistuje první derivace.

```
> f:=x->4*x-3*(x^2)^(1/3)-2;
```

$$f := x \to 4x - 3\left(x^2\right)^{1/3} - 2$$

```
> D(f);
```

$$x \to 4 - \frac{2x}{\left(x^2\right)^{2/3}}$$

První derivace neexistuje pro $x=0.$ Ale nula patří do definičního oboru dané funkce, takže ji nesmíme vynechat při dalším vyšetřování.
Určíme stacionární body funkce, tj. řešíme rovnici D(f)(x)=0.

```
> solve(D(f)(x)=0, x);
```

$$\frac{1}{8}$$

Vypočteme funkční hodnotu ve stacionárním bodě $x = \frac{1}{8}$, v bodě, kde neexistuje první derivace, tj. $x=0$ a v krajních bodech intervalu.

```
> vecf:=(f(0),f(1/8),f(-1),f(2));
```

$$vecf := -2, -\frac{3}{2} - \frac{3}{64}\,64^{2/3}, -9, 6 - 3\,4^{1/3}$$

Pro lepší představu o vypočtených hodnotách zapíšeme výsledek desetinným číslem.

```
> evalf(vecf);
```

$$-2., -2.250000000, -9., 1.237796844$$

Tedy   minimum nastává v bodě $x=$ -1 a maximum v bodě $x=2$.
POZNÁMKA:
When an exponent of a power is a rational number and its numerator is even, for example, use (x^2)^(1/3) instead of x^(2/3). Otherwise you will meet coplex number. To see the following.