Operační výzkum

Vícekriteriální hodnocení variant.

Grafická metoda. Metoda váženého součtu.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Operační program Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Název projektu: Inovace magisterského studijního programu Fakulty ekonomiky a managementu
Registrační číslo projektu: CZ.1.07/2.2.00/28.0326

Vícekriteriální optimalizace

– patří sem úlohy, kdy daná řešení, resp. varianty, posuzujeme dle více kritérií.

Problematiku vícekriteriální optimalizace dělíme na dvě podoblasti:

Vícekriteriální hodnocení variant, VHV
– množina variant je konečná; úloha VHV je zadána kriteriální maticí. Určuje se pořadí variant od nejlepší po nejhorší při uvážení všech kriterií.

Vícekriteriální programování, VP
– přípustných řešení je zpravidla nekonečně mnoho; úloha VP je zobecněním úloh lineárního programování vzhledem k počtu účelových funkcí.

Úvod do vícekriteriálního hodnocení variant

Úloha vícekriteriálního hodnocení variant:

p variant $X_1, X_2, ..., X_p$ je hodnoceno podle k kritérií $A_1, A_2, ..., A_k$.
Tato hodnocení tvoří tzv. **kriteriální matici**

$$Y = (y_{ij}), \text{ kde} \tag{1}$$

prvek y_{ij} značí ohodnocení varianty X_i podle kritéria A_j,
$i = 1, 2, ..., p, \; j = 1, 2, ..., k$.

Je třeba získat normalizovanou kriteriální matici $R = (r_{ij})$. Z ní budeme vycházet.

Úvod do vícekriteriálního hodnocení variant

Kritéria jsou maximalizační nebo minimalizační.
Minimalizační kritéria se převádí na maximalizační vyjádřením úspor vůči nejhorší variantě, tj.

$$y'_{ij} = \max_i(y_{ij}) - y_{ij}, \ \ i = 1, 2, ..., p, \ \ j = 1, 2, ..., k. \tag{2}$$

V kriteriální matici $Y' = (y'_{ij})$ jsou již všechna kritéria maximalizačního typu – čím vyšší hodnota v daném sloupci, tím lepší varianta dle daného kritéria je.
Stále jsou ale hodnoty v různých sloupcích v různých jednotkách (cena v Kč, spotřeba v l/100km, rozloha v ha, apod.) a tudíž neporovnatelné.

Úvod do vícekriteriálního hodnocení variant

Proto se zavádí tzv. **normalizovaná kriteriální matice** R s prvky

$$r_{ij} = \frac{y_{ij} - d_j}{h_j - d_j}, \; i = 1, 2, ..., p, \; j = 1, 2, ..., k, \; \text{kde} \tag{3}$$

$$d_j = \min_i(y_{ij}) \text{ a } h_j = \max_i(y_{ij}).$$

Matice $R = (r_{ij})$ má všechny prvky bezrozměrná čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Nyní již jsou hodnoty z různých sloupců (ohodnocení dle různých kritérií) navzájem porovnatelné.

Nedominované varianty

V případě, kdy chceme určit jen jednu nejlepší (vítěznou) variantu, lze se omezit pouze na tzv. NEDOMINOVANÉ VARIANTY.

Pokud k dané variantě X_a existuje nějaká varianta X_b, taková, že varianta X_b je lepší podle všech kritérií než varianta X_a, říkáme, že **varianta X_a je dominovanou variantou**.
Říkáme: "Varianta X_a je dominována variantou X_b", nebo též
"Varianta X_b dominuje variantu X_a".

Ve skutečnosti stačí, aby varianta X_b byla lepší alespoň v jednom kritériu při alespoň stejných hodnotách v ostatních kritériích.

Variantu, ke které neexistuje taková, jež by ji dominovala, nazýváme **nedominovanou variantou**.

Metody řešení

V dalším popíšeme 2 metody, jak určit pořadí variant. Vždy se jedná o to, při zohlednění všech kritérií, získat nějakou jedinou kvantitativní charakteristiku pro každou variantu.

Metody:

- grafická metoda,
- metoda váženého součtu.

V obou metodách se vychází z normalizované kriteriální matice R.

Grafická metoda

Zavádí se **hvězdicový souřadnicový systém** s poloosami $A_1, A_2, ..., A_k$.
Dvě sousední poloosy spolu svírají úhel $\alpha = \frac{2\pi}{k} = \frac{360^\circ}{k}$.

Pro každou variantu X_i potom vyneseme na jednotlivé poloosy A_j příslušné hodnoty r_{ij}, $i = 1, 2, ..., p$, $j = 1, 2, ..., k$. Každé dvě sousední hodnoty (na sousedních poloosách) spojíme úsečkou. V grafu je pak každá varianta X_i zobrazena jako příslušný **polygon** – obecně k-úhelník.

Čím má potom daný polygon větší obsah, tím je příslušná varianta lepší.

Daný polygon X_i, tj. příslušný k-úhelník, lze rozdělit na k trojúhelníků, kde vždy známe jeden úhel (úhel α) a délky obou stran, které svírají tento úhel. Označíme-li tyto strany b, c, pak obsah trojúhelníku je dán vztahem

$$S_\triangle = \frac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

Grafická metoda

Obsah S polygonu X_i je potom

$$S(X_i) = \frac{1}{2}\sin\alpha(r_{i1}r_{i2} + r_{i2}r_{i3} + \ldots + r_{i,k-1}r_{ik} + r_{ik}r_{i1}).$$

Jelikož hodnota $\sin\alpha$ je stejná u všech variant, lze pořadí variant získat i pouhým porovnáním výrazů v závorkách, tj. součtů

$$S'(X_i) = r_{i1}r_{i2} + r_{i2}r_{i3} + \ldots + r_{i,k-1}r_{ik} + r_{ik}r_{i1}.$$

Grafická metoda

Obsah S polygonu X_i je potom

$$S(X_i) = \frac{1}{2} \sin \alpha (r_{i1} r_{i2} + r_{i2} r_{i3} + \ldots + r_{i,k-1} r_{ik} + r_{ik} r_{i1}).$$

Jelikož hodnota $\sin \alpha$ je stejná u všech variant, lze pořadí variant získat i pouhým porovnáním výrazů v závorkách, tj. součtů

$$S'(X_i) = r_{i1} r_{i2} + r_{i2} r_{i3} + \ldots + r_{i,k-1} r_{ik} + r_{ik} r_{i1}.$$

Příklad

Výběr zaměstnání

Vybíráme z pěti pracovních příležitostí, hodnoceny jsou dle čtyř kritérií:

A_1 ... plat [tis. Kč],

A_2 ... hodinový úvazek [hod./den],

A_3 ... počet dnů dovolené za rok,

A_4 ... cany za oběd [Kč],

Kriteriální matice je

$$Y = \begin{pmatrix} 24 & 8,5 & 25 & 30 \\ 22 & 8,0 & 25 & 40 \\ 20 & 6,0 & 20 & 60 \\ 25 & 8,5 & 40 & 30 \\ 15 & 4,0 & 15 & 40 \end{pmatrix}$$

Nalezněte množinu všech nedominovaných variant. Určete pořadí všech variant od nejlepší po nejhorší. Úlohu řešte graficky.

Příklad

Řešení:

Kritéria maximalizační jsou: A_1, A_3;
Kritéria minimalizační jsou: A_2 a A_4.

Minimalizační převedeme na maximalizační dle vzorce (2), tj. vyjádříme úspory vůči nejhorší variantě pro dané kritérium.
Získáme kriteriální matici

$$Y' = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 25 & 30 \\ 22 & 0,5 & 25 & 20 \\ 20 & 2,5 & 20 & 0 \\ 25 & 0 & 40 & 30 \\ 15 & 4,5 & 15 & 20 \end{pmatrix},$$

kde již všechna kritéria jsou maximalizačního typu.

Z matice Y' můžeme snadno zjistit dominované a nedominované varianty (porovnáním každé varianty s každou další).
Varianta X_1 je dominovaná variantou X_4. Žádné další dominované varianty nejsou, proto množina všech nedominovaných variant je

$$X_N = \{X_2, X_3, X_4, X_5\}.$$

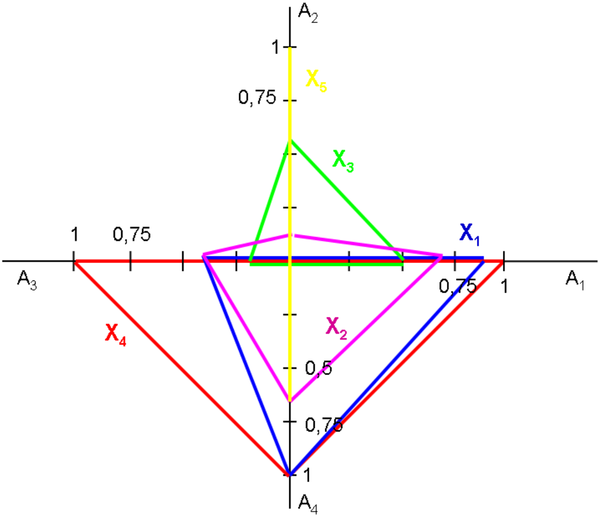
Příklad

Dle vzorce (3) získáme normalizovanou kriteriální matici

$$R = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,4 & 1 \\ 0,7 & 1/9 & 0,4 & 2/3 \\ 0,5 & 5/9 & 0,2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Nyní lze polygony pro jednotlivé varianty znázornit graficky, viz obrázek. Z obrázku – porovnáním příslušných obsahů – je zřejmé pořadí variant:

1. X_4,
2. X_1,
3. X_2,
4. X_3,
5. X_5.



Obrázek: Úloha VHV, grafické znázornění variant

Příklad

Přesně spočítat obsahy polygonů je možno, stačí však spočítat těmto obsahům úměrné součty $S'(X_i)$, viz tabulka:

X_i	$S'(X_i) = r_{i1}r_{i2} + r_{i2}r_{i3} + r_{i,3}r_{i4} + r_{i4}r_{i1}$	Pořadí
X_1	$0,9.0 + 0.0,4 + 0,4.1 + 1.0,9 = 1,300$	2.
X_2	$0,7.1/9 + 1/9.0,4 + 0,4.2/3 + 2/3.0,7 = 0,856$	3.
X_3	$0,5.5/9 + 5/9.0,2 + 0,2.0 + 0.0,5 = 0,389$	4.
X_4	$1.0 + 0.1 + 1.1 + 1.1 = 2,000$	1.
X_5	$0.1 + 1.0 + 0.2/3 + 2/3.0 = 0,000$	5.

Tabulka: Grafická metoda, pořadí variant dle součtů $S'(X_i)$

Metoda váženého součtu

Relativní důležitost jednotlivých kritérií lze vyjádřit pomocí **vektoru vah** kritérií

$$\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_k), \text{ kde } v_j \geq 0, \sum_{j=1}^{k} v_j = 1.$$

Metoda váženého součtu využívá znalosti vah kritérií. Jako kompromisní je vybrána ta varianta, která maximalizuje součet součinů vah kritérií a odpovídajících hodnot z normalizované kriteriální matice.

$$\sum_{j=1}^{k} v_j r_{ij} \longrightarrow max \tag{4}$$

Příklad

Př.:

Metodou váženého součtu určete pořadí variant z příkladu „Výběr zaměstnání". Uvažujte vektor vah kritérií $\vec{v} = (0,5; 0,2; 0,2; 0,1)$.

Řešení:

Pro každou variantu se vypočte hodnota součtu $\sum_{j=1}^{4} v_j r_{ij}$, viz tabulka.

X_i	$\sum_{j=1}^{4} v_j r_{ij}$	Pořadí
X_1	$0,5.0,9 + 0,2.0 + 0,2.0,4 + 0,1.1 = 0,630$	2.
X_2	$0,5.0,7 + 0,2.1/9 + 0,2.0,4 + 0,1.2/3 = 0,519$	3.
X_3	$0,5.0,5 + 0,2.5/9 + 0,2.0,2 + 0,1.0 = 0,401$	4.
X_4	$0,5.1 + 0,2.0 + 0,2.1 + 0,1.1 = 0,800$	1.
X_5	$0,5.0 + 0,2.1 + 0,2.0 + 0,1.2/3 = 0,267$	5.

Tabulka: Metoda váženého součtu, pořadí variant

Poznámka

Poznámka:

Pořadí variant u našeho příkladu vyšlo stejně jak metodou grafickou, tak metodou váženého součtu. Obecně to tak ale vycházet nemusí. Stačí si uvědomit, že pořadí určené metodou váženého součtu závisí na vektoru vah kritérií.