Řešené problémy

1) **Mějme standardní neoklasickou dvoufaktorovou produkční funkci, která je homogenní prvního stupně:**

$$Y^* = F(K,N) \qquad (7.49)$$

a) **Odvoďte závislost mezi tempem růstu potenciálního produktu *(y*)* a tempem růstu kapitálu *(k)* a agregátního pracovního inputu *(n)*.**

Derivací produkční funkce (7.49) podle času určíme determinanty přírůstku potenciálního produktu. Tedy

$$\frac{dY^*}{dt} = \frac{\delta F}{\delta K} \cdot \frac{dK}{dt} + \frac{\delta F}{\delta N} \cdot \frac{dN}{dt}$$

Dělme nyní obě strany uvedené rovnice Y, dostaneme výraz pro proporcionální míru (tempo)růstu Y*:*

$$\frac{dY^* / dt}{Y^*} \equiv \frac{\Delta Y^*}{Y^*} = \frac{\delta F}{\delta K} \cdot \frac{1}{Y^*} \cdot \frac{dK}{dt} + \frac{\delta F}{\delta N} \cdot \frac{1}{Y^*} \cdot \frac{dN}{dt} \qquad (7.50)$$

Na pravé straně rovnice (7.50) nyní vynásobíme prvý člen výrazem K/K a druhý člen na této straně vynásobíme výrazem L/L. Dostaneme:

$$\frac{\Delta Y^*}{Y^*} = \frac{\delta F}{\delta K} \cdot \frac{K}{Y^*} \cdot \frac{dK}{dt} \cdot \frac{1}{K} + \frac{\delta F}{\delta N} \cdot \frac{N}{Y^*} \cdot \frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N}$$

Jelikož v uvedené rovnici se [(dK/dt)/K) = ΔK/K (tj. k) a obdobně [(dN/dt)/N) = ΔN/N (tj. n), můžeme psát pro závislost tempa růstu potenciálního produktu na k a n toto:

$$y^* = \frac{\delta F}{\delta K} \cdot \frac{K}{Y^*} \cdot k + \frac{\delta F}{\delta N} \cdot \frac{N}{Y^*} \cdot n \qquad (7.51)$$

nebo $\quad y^* = w \cdot k + (1 - w) \cdot n, \qquad (7.52)$

kde w = (δF/δK) · (K/Y) a (1 - w) = (δF/δN) · (N/Y*). Roste-li tempo růstu kapitálu (k), potom se tempo růstu potenciálního produktu (y*) zvýší w krát k; roste-li tempo růstu práce (n), potom se tempo růstu potenciálního produktu zvýší (1 - w) krát n.*

b) **Ukažte, že koeficienty w a (1 - *w*) vyjadřují elasticitu produktu vzhledem k výrobnímu faktoru kapitál (*w*) a výrobnímu faktoru práce (1 - *w*) a současně vyjadřují za předpokladu dokonalé konkurence podíl nákladů kapitálu (náklady kapitálu - zisk) na produktu a podíl nákladů práce (náklady práce - mzdové náklady) na produktu.**

Elasticita produktu vzhledem ke změnám kapitálu (značíme w) - je-li N konstantní - se rovná

$$w = \frac{\delta Y^*}{\delta K} \cdot \frac{K}{Y^*} \qquad (7.53)$$

Obdobně elasticita produktu vzhledem ke změnám práce (1 - w) za předpokladu, že se K nemění, rovná

$$(1 - w) = \frac{\delta Y^*}{\delta N} \cdot \frac{N}{Y^*} \qquad (7.54)$$

Závěr: ***koeficienty w a (1 - w) v rovnici (7.52) jsou elasticity produktu vzhledem ke kapitálu (w) a elasticity produktu vzhledem k práci (1 - w).***

Nyní ukážeme, že koeficienty w a (1 - w) představují zároveň podíl nákladů kapitálu (náklad kapitálu - zisk) na produktu a podíl nákladů práce (náklad práce - mzdové náklady) na produktu.

Za předpokladu dokonalé konkurence se průměrná míra zisku (χ = R/K) rovná marginálnímu produktu kapitálu δY/δK. Tedy*

$$\chi = \frac{\delta F}{\delta K} \cdot \frac{K}{Y^*} = \frac{R}{Y^*} = \text{podíl zisku na produktu} \qquad (7.55)$$

Obdobně za předpokladu dokonalé konkurence se průměrná reálná mzda (reálná mzdová sazba) značíme W/N rovná marginálnímu produktu práce δF/δN. Tedy

$$(1 - w) = \frac{\delta F}{\delta N} \cdot \frac{K}{Y^*} = \frac{W}{Y^*} = \text{podíl práce na produktu} \qquad (7.56)$$

Závěr: ***koeficienty w a (1 - w) v rovnici (7.52) jsou zároveň podíly (náklady) kapitálu na produktu (w) a podíly práce (náklady práce) na produktu (1 - w).***

c) **Ukažte, že je-li neoklasická produkční funkce (7.49) homogenní prvního stupně, potom zvýšení obou výrobních faktorů o stejné procento musí ekviproporcionálně (o stejné procento) zvýšit tempo růstu produktu, neboť součet obou koeficientů *w* a (1 - *w*) se musí rovnat jedné. Tedy**

$$w + (1 - w) = 1$$

Vzhledem k tomu, že w + (1 - w) = 1, používáme ve výkladu v kapitole 7 (i dále zde v Řešených problémech) označení pro elasticitu produktu vzhledem k práci koeficient (1 - w). Zvýší-li se např. tempo růstu kapitálu (k) o 3 % a tempo růstu agregátního vstupu práce také o 3%, potom se tempo růstu produktu (y) zvýší ekviproporcionálně, tj. o 3 %. Tento závěr lze získat z rovnice (7.52):*

$$0{,}03 = w\,(0{,}03) + (1 - w) \cdot (0{,}03),$$

neboť
$$1 = w + (1 - w) \qquad (7.58)$$

Závěr: ***je-li produkční funkce homogenní prvního stupně, součet koeficientů elasticity produkce vzhledem ke kapitálu a k práci, resp. koeficientů vyjadřujících relativní podíly kapitálu a práce na produktu za předpokladu dokonalé konkurence se rovná jedné. Relativní podíl nákladů kapitálu (w) a relativní podíl nákladů práce (1 - w) vyčerpávají produkt - funkce zakotvuje konstantní výnosy z rozsahu.***

d) **S ohledem na závěry v ad 1 b) a v ad 1 c) reformulujte rovnici, jež obsahuje determinaci tempa růstu potenciálního produktu, tj. rovnici (7.52).**

Tempo růstu potenciálního produktu (y) je rovno součtu tempa růstu kapitálu (k) násobeného w, tj. elasticitou produktu vzhledem ke kapitálu, resp. relativním podílem kapitálu na produktu plus tempa růstu pracovního inputu (n) násobeného (1 - w), tj. elasticitou produktu vzhledem k práci, resp. relativním podílem práce na produktu. Tedy*

$$y^* = w \cdot k + (1 - w) \cdot n. \qquad (7.58)$$

2) **Mějme produkční funkci ve specifické formě nazvané podle prof. C. W. Cobba a prof. P. H. Douglase Cobb-Douglasovou produkční funkcí, resp. dvoufaktorovou substituční produkční funkci ve tvaru**

$$Y^* = b\, K^W N^{1-W} \qquad (7.59)$$

kde *Y je objem potenciálního produktu nebo index růstu tohoto produktu, *b* je počáteční, resp. úrovňová konstanta, *K* je objem kapitálu nebo index růstu kapitálu, *N* je objem pracovního inputu nebo index růstu tohoto inputu, *w* a (1 - *w*) jsou parametry funkce.**

a) **Nechť ve výchozím období (t_0) jsou indexy všech proměnných rovny 1,00: tedy *b* =**

1,00, K = 1,00 a N = 1,00. Parametr w = 0,25 a parametr (1 - w) = 0,75. Nechť v dalším období (t_1) dojde ke zvýšení objemu kapitálu o 6% a objem pracovního inputu zůstane nezměněn. Index počáteční, resp. úrovňové konstanty je nezměněn (b = 1,00). O kolik procent se zvýší potenciální produkt?

$$1{,}015 = 1{,}00\ (1{,}06^{0,25} \cdot 1{,}00^{0,75})$$

Potenciální produkt (Y) vzroste o 1,5 %.*

b) **Jak se zvýší tempo růstu potenciálního produktu, jestliže se objem kapitálu nezmění (jeho tempo je tedy 0 %), zatímco tempo růstu objemu pracovního inputu je 4 % (ostatní předpoklady jsou stejné jako ve 2a)?**

$$1{,}03 = 1{,}00\ (1{,}00^{0,25} \cdot 1{,}04^{0,75})$$

Potenciální produkt vzroste o 3 %.

c) **Interpretujte ekonomické proměnné v Cobb-Douglasově produkční funkci v (7.59), jakož i interpretujte ekonomický význam parametrů w a (1 - w)?**

Z produkční funkce v (7.59) plyne, že tempo růstu potenciálního produktu se rovná autonomnímu faktoru (jde o úrovňovou konstantu), násobenému indexem růstu kapitálu umocněným parametrem w a indexu růstu objemu pracovního inputu umocněným parametrem (1 - w). Parametry (váhy) indexu w a (1 - w) představují elasticity (nebo procentní reakci) potenciálního produktu na zvýšení výrobního faktoru kapitál a práce. Tak elasticita potenciálního produktu vzhledem ke změně kapitálu (K) činí 0,25 (tj. 1/4), zatímco elasticita růstu potenciálního produktu vzhledem ke změně inputu práce (N) činí 0,75 (tj. 3/4). Současně parametr w vyjadřuje - za předpokladu dokonalé konkurence - podíl nákladů kapitálu na produktu a parametr (1 - w) vyjadřuje podíl mzdových nákladů na produktu. Tyto závěry vyplývají názorně z toho, jestliže logaritmujeme Cobb-Douglasovu produkční funkci, abychom jí převedli z funkce exponenciální na lineární funkci. Tedy

$$\ln Y^* = \ln b + w \ln K + (1 - w) \ln N \qquad (7.59a)$$

kde ln je označení pro přirozený logaritmus. Budeme-li abstrahovat od úrovňové konstanty b a uvědomíme-li si, že změna v přirozeném logaritmu proměnné se přibližně rovná procentní změně této proměnné, můžeme rovnici (7.59a) přepsat do rovnice pro tempo růstu produktu (y):*

$$y^* = w \cdot k + (1 - w) \cdot n, \qquad (7.59b)$$

Všimneme si, že rovnice (7. 59b) je ekvivalentní s rovnicí (7.58) v ad 1d).

d) **Předpokládejte, že se objem kapitálu a objem práce současně zvýší o 4 % (úrovňová konstanta se nemění, zůstává 1,00). Jak se zvýší tempo růstu potenciálního produktu při současném růstu objemu kapitálu o 4 % a růstu objemu pracovního inputu také o 4%?**

$$1{,}04 = 1{,}00\ (1{,}04^{0,25} \cdot 1{,}04^{0,75})$$

Zvýší-li se kapitál a práce současně o 4 % (obecně o stejné procento), potenciální produkt vzroste o 4% (tedy o stejné procento jako oba výrobní faktory). Cobb-Douglasova produkční funkce proto zakotvuje konstantní výnosy z rozsahu, protože součet vah obou faktorů se rovná jedné: ***w + (1 - w) = 1***

Jinými slovy to znamená, že součet koeficientů w a (1 - w) se v Cobb-Douglasově funkci rovná 1: podíly nákladů kapitálu a podíly nákladů práce vyčerpávají produkt. Tento závěr lze prokázat i takto: zakotvuje-li Cobb-Douglasova produkční funkce konstantní výnosy z rozsahu, potom za předpokladu dokonalé konkurence jsou výrobní faktory kapitál (K) a práce (N) placeny za své služby podle jejích marginálních produktivit (tedy výrobní faktory pobírají jejich marginální produkty) a jejích odměny, tj. zisk a mzdy musí vyčerpávat celý produkt. Potom můžeme psát:

$$Y^* = MPK \cdot K + MPN \cdot N \qquad (7.60)$$

Marginální produkt kapitálu (MPK) získáme parciální derivací Cobb-Douglasovy produkční funkce podle kapitálu. Tedy

$$MPK = \frac{\delta Y^*}{\delta K} = w \cdot b \cdot K^{w-1} \cdot N^{1-w} \qquad (7.61)$$

Obdobně marginální produkt práce (MPN) získáme parciální derivací Cobb-Douglasovy produkční funkce podle práce. Tedy

$$MPN = \frac{\delta Y^*}{\delta N} = (1-w) \cdot b \cdot K^{w} \cdot N^{-w} \qquad (7.62)$$

Nyní dosadíme do rovnice (7.60) za MPK rovnici (7.61) a za MPN rovnici (7.62):

$$Y^* = wb \cdot K^{w-1} \cdot N^{(1-w)} \cdot K + (1 - w) \cdot b \cdot K^{w} \cdot N^{-w} \cdot N \qquad (7.63)$$

Dělme rovnici (7.63) rovnicí Cobb-Douglasovy produkční funkce (7.49) a dostaneme:

$$\frac{Y^*}{Y^*} = \frac{wbK^{w-1}N^{(1-w)}K}{bK^{w}N^{(1-w)}} + \frac{(1-w)bK^{w}N^{-w}N}{bK^{w}N^{(1-w)}} \qquad (7.64)$$

A po vykrácení: $$1 = w + (1 - w) \qquad (7.65)$$

Závěr: ***Cobb-Douglasova produkční funkce zakotvuje konstantní výnosy z rozsahu****.*

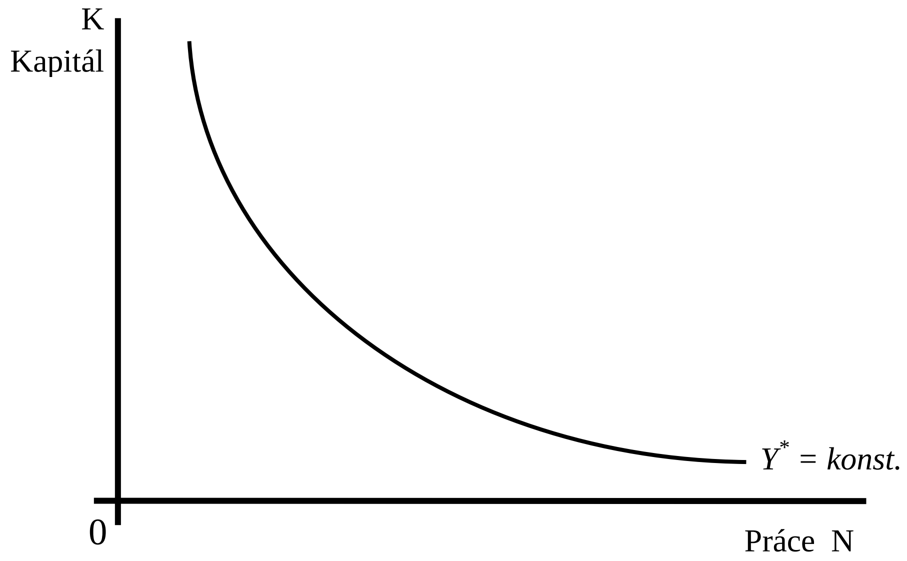
3) **Předpokládejte, že existuje konstantní objem potenciálního produktu (Y^* = konst.); pro tento konstantní objem potenciálního produktu je produkční funkce izokvantou, resp. produkční izokvantou, která spojuje kombinace kapitálu a práce, tj. všechny body efektivních výrobních technologií (technik) vyrábějící stejné množství produkce. Funkční předpis této efektivní izokvanty je dán tedy takto (nebereme v úvahu příspěvek technologického pokroku):**

$$Y^* = \text{konstantní} = F(K, N) \qquad \mathbf{(7.66)}$$

Zkonstruujte graf statické dvoufaktorové produkční funkce v (7.66) za předpokladu, že funkce je spojitá v *K* a *N*.

Řešení je na obr. 7.13: grafem produkční funkce (7.66) je klesající křivka, která je konvexní k počátku souřadnic O. Protože produkční funkce v (7.66) zakotvuje maximálně dosažitelný potenciální produkt Y dosažitelný z daných vstupů kapitálu (K) a práce (N), pak efektivní izokvanty pro různé hladiny produktu se neprotínají. Produkční funkce na obr. 7.13 a obsažená v rovnici (7.66) modeluje pouze* **efektivní výrobní technologie (techniky)***, tzn., že určité maximální hladiny lze dosáhnout jednou či nekonečně velkým počtem výrobních technologií (technik), resp. kombinací kapitálu a práce. Pro efektivní výrobní technologie (techniky), které se nacházejí* **na hranici výrobních možností** *platí, že*

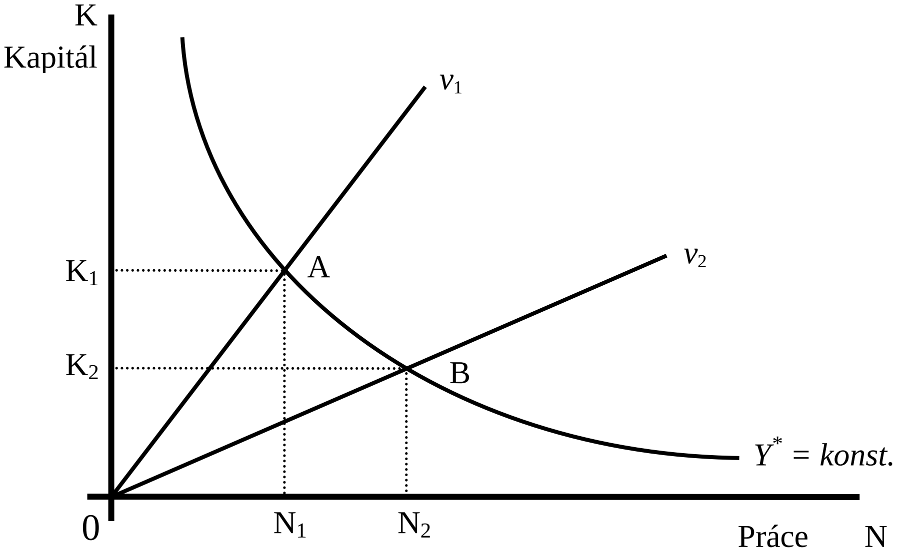
úbytek vstupu jednoho výrobního faktoru v určité výrobní technologii (technice) oproti jiné výrobní technologii (technice) je nahrazován přírůstkem vstupu druhého výrobního faktoru.
Obr. 7. 13:



4) **Předpokládejte dvě kombinace výrobních technologií (technik) na produkční funkci v (7.66) znázorněné na obr. 7.13 pro konstantní objem potenciálního produktu *Y**, a to kombinaci výrobních faktorů (technologií, resp. technik) K_1 a N_1, jejímž obrazem je bod *A* na produkční funkci a kombinaci výrobních faktorů (technologií, resp. technik) K_2 a N_2, jejichž obrazem je bod *B*: výrobní technologie (technika) při výrobě stejného objemu potenciálního produktu v bodě *A* je tedy kapitálově náročnější než druhá výrobní technologie (technika), takže $K_1 > K_2$, ale současně výrobní technologie (technika) *A* je méně pracovně náročná než výrobní technologie (technika) *B*, tedy $N_1 < N_2$.**

   a) **Znázorněte obě výrobní techniky.(technologie) graficky a zobrazte koeficient kapitálové intenzity v_1 pro kombinaci výrobních faktorů K_1 a N_1 a koeficient v_2 pro kombinaci výrobních faktorů K_2 a N_2.**
   Řešení je obsaženo na obr. 7.14.

Obr. 7.14:



Z obr. 7.14 je patrné, že u výrobní technologie (techniky) A je koeficient kapitálové intenzity (vybavenosti) $v_1 = K_1/N_1$ větší než u výrobní technologie (techniky) B, kde činí $v_2 = K_2/N_2$.

b) Jaká je velikost kapitálového koeficientu (průměrného) (značíme λ) při výrobní technologii (technice) *A* ve srovnání s velikostí kapitálového koeficientu u výrobní technologie (techniky) *B*?

Kapitálový koeficient u výrobní technologie (techniky) A se rovná $\lambda_A = K_1/Y^*$ a je větší než kapitálový koeficient u technologie (techniky) B, kde se rovná $\lambda_B = K_2/Y^*$. Tedy

$$\boldsymbol{\lambda_A > \lambda_B}.$$

Všimneme si, že s růstem kapitálové intenzity (vybaveností), roste i produktivita práce, a to jak marginální, tak i průměrná produktivita práce.

5) **Předpokládejte obecnou dvoufaktorovou produkční funkci spojitou v *K* a *N*: tedy *Y** = *F (K, N)*. Vyjádřete pro uvedenou produkční funkci totální diferenciál a proveďte jeho ekonomickou interpretaci.**

Totální diferenciál uvedené produkční funkce činí

$$dY^* = \frac{\delta Y^*}{\delta K} \cdot dK + \frac{\delta Y^*}{\delta N} \cdot dN \qquad (7.67)$$

Totální diferenciál dané produkční funkce má tuto ekonomickou interpretaci: přírůstek potenciálního produktu (dY) je určen součtem marginální produktivity kapitálu (δY*/δK) krát přírůstek kapitálu (dK) a marginální produktivity práce (δY*/δN) krát přírůstek inputu práce (dN).*

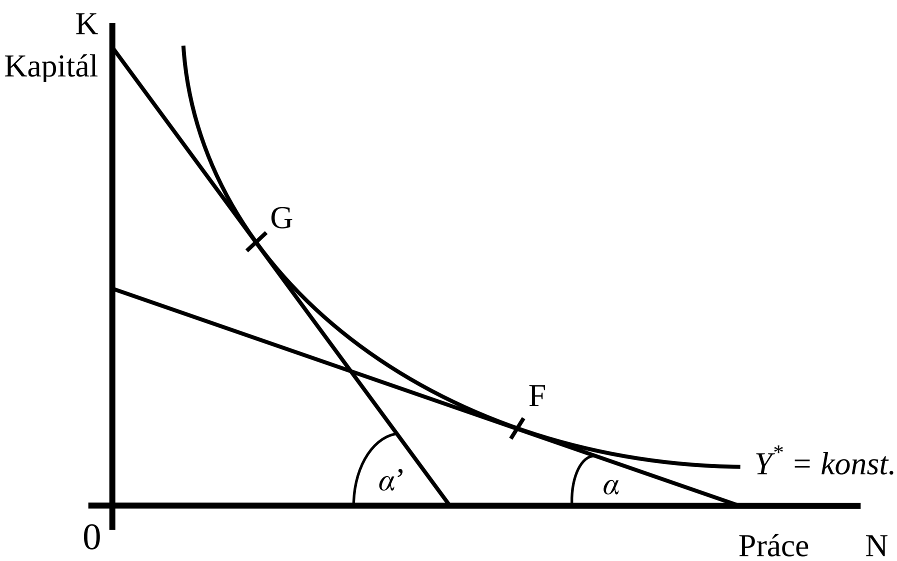
6) **Předpokládejte, že existuje obecná dvoufaktorová produkční funkce *Y* = F (K, N)*, jež je spojitá v *K* a *N* (odmýšlíme opět od technologického pokroku).**

a) **Definujte marginální míru technologické (technické) substituce (značíme Ω) a proveďte její ekonomickou interpretaci.**
Marginální míra technologické substituce je určena poměrem marginální produktivity práce (tj. parciální derivace produkční funkce podle N) a marginální produktivity kapitálu (tj. parciální derivace produkční funkce podle K). Tedy

$$\Omega = \frac{\delta Y^* / \delta N}{\delta Y^* / \delta K} \doteq \frac{\Delta K}{\Delta N} \qquad (7.68)$$

Závěr: **marginální míra technologické substituce** *měří přírůstek výrobního faktoru kapitál (K), který musí nahradit úbytek výrobního faktoru práce (N) o jednotku tak, aby se objem produktu nezměnil.*

b) **Znázorněte marginální míru technologické substituce graficky a pomocí grafu proveďte její ekonomickou interpretaci.**
Řešení je obsaženo na obr. 7.15. Graficky je marginální míra technologické substituce vyjádřena jako tangens úhlu, který svírá tečna produkční funkce v určitém bodě s horizontální osou. Např. na obr. 7.15 sklon produkční funkce v bodě F se rovná tg α, tj. rovná se přírůstku kapitálu (ΔK), který musí nahradit úbytek výrobního faktoru práce (ΔN) o jednotku tak, aby se objem produktu nezměnil.
Obr. 7.15:



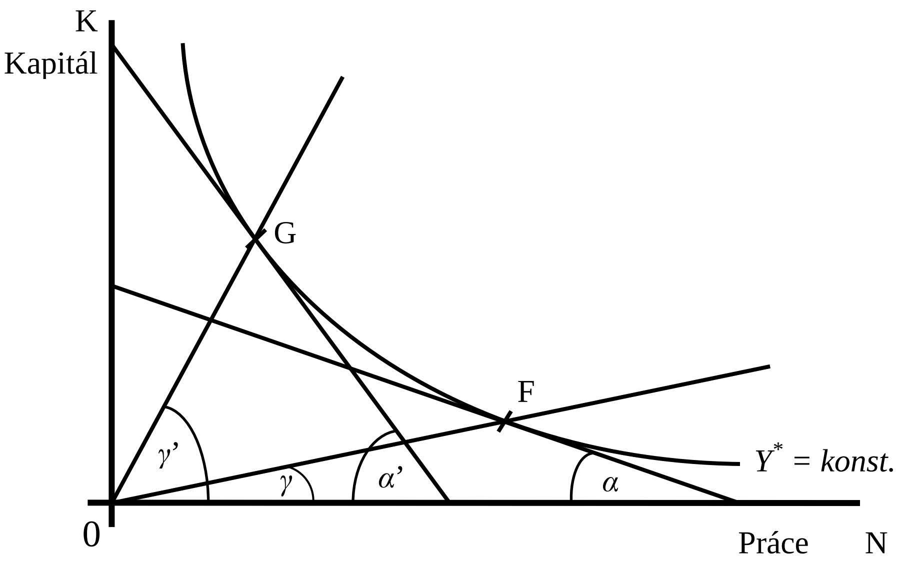
Na obr. 7.15 je marginální míra technologické substituce v bodě G vyšší než marginální míra substituce v bodě F, neboť v bodě G je vyšší kapitálová intenzita než v bodě F. Proto tg α' > tg α. Marginální míra technologické substituce má význam při zkoumání vzájemného vztahu mezi výrobními faktory.

7) **Předpokládejte obecnou dvoufaktorovou produkční funkci spojitou v *K* a *N*, tedy *Y** *= F (K, N)*.**

a) Charakterizujte ***pružnost (elasticitu) technologické substituce*** (značíme σ).
Pružnost (elasticitu) technologické substituce definujeme jako procentní změnu kapitálové intenzity (vybavenosti) při jednoprocentní změně marginální míry technologické substituce. Tedy

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{K}{N}\right)}{K/N} : \frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{\Delta v}{v} : \frac{d\Omega}{\Omega} \qquad (7.69)$$

b) Znázorněte elasticitu technologické substituce graficky.
Řešení je na obr. 7.16. Hodnota elasticity technologické substituce je dána **zakřivením** *izokvanty, změnou úhlu γ při jednotkové změně úhlu α. Zakřivenost produkčních izokvant může být obecně v různých bodech odlišná, a obecně elasticita technologické substituce (σ) nemusí být v průběhu celé izokvanty konstantní. Povšimneme si, že z grafické interpretace elasticity technologické substituce plyne, že čím je elasticita technologické substituce menší, tím je izokvanta v okolí daného bodu zakřivenější (a opačně).*
Obr. 7.16:



8) **Jaká je hodnota elasticity technologické substituce (σ) v Cobb-Douglasově produkční funkci?**

Obecně je elasticita technologické substituce dána poměrem relativního přírůstku kapitálové intenzity (Δv/v) k relativnímu přírůstku marginální míry substituce (ΔΩ/Ω) - viz rovnici (7.69) v příkladu 7a.
Abychom mohli odpovědět na otázku jaká je elasticita substituce v Cobb-Douglasově produkční funkci, musíme vyjádřit relativní změnu marginální míry technologické substituce (tj. ΔΩ/Ω) pomocí marginálních produktivit kapitálu a práce a jejich vztahu k

průměrným produktivitám práce a kapitálu. Marginální produktivita kapitálu a marginální produktivita práce představují parciální derivace produkční funkce podle kapitálu a parciální derivaci produkční funkce podle práce. Ekonomicky řečeno, parciální derivace produkční funkce podle kapitálu udává přírůstek objemu potenciálního produktu (dY) při jednotkovému zvýšení kapitálu a neměnném objemu výrobního faktoru práce. Obdobně parciální derivace produkční funkce podle práce udává přírůstek objemu potenciálního produktu (dY*) při jednotkovém zvýšení práce a neměnném objemu výrobního faktoru kapitál. Předpokládejme, že tyto parciální derivace jsou kladné.*

Cobb-Douglasova produkční funkce je exponenciálním typem produkční funkce, je tedy nelineární, a proto ji transformujeme ve funkci lineární (stejně jako v ad 2c) tak, že všechny proměnné změníme na přirozené logaritmy proměnných. Logaritmujme proto Cobb-Douglasovu produkční funkci (7.59) a dostaneme

$$\ln Y^* = \ln b + w \ln K + (1 - w) \ln N \qquad \text{(viz 7.59a)}$$

V rovnici (7.59a) má Cobb-Douglasova produkční funkce lineární tvar, a to proto, že jsme ji vyjádřili v logaritmických místo v prostých jednotkách.

Pro parametr w můžeme - za předpokladu, že se objem pracovního inputu nemění - psát:

$$\frac{\text{Změměv logaritmu potenciálního produktu } \left(Y^*\right)}{\text{Změměv logaritmu výrobního faktoru kapitál } \left(K\right)} = w \qquad (7.70)$$

Změna v přirozeném logaritmu proměnné je přibližně rovna procentní změně proměnné. Tedy

$$\frac{\text{Procentní změmě potenciálního produktu}}{\text{Procentní změměv objemu kapitálu}} = w \qquad (7.70a)$$

Nyní připomeneme, že pružnost produktu vzhledem k danému výrobnímu faktoru je poměr relativní změny (procentní změny) produktu k relativní změně (procentní změně) daného výrobního faktoru. Poměr procentních změn je poměrem absolutních změn násobených obráceným poměrem úrovně dvou proměnných. Tedy

$$w = \frac{\Delta Y^*}{\Delta K} \cdot \frac{K}{Y^*} \qquad (7.71)$$

Limitní hodnota absolutních změn pro infinitesimální přírůstek je **marginální produktivita kapitálu***, tj. parciální derivace produkční funkce podle kapitálu. S ohledem na toto můžeme psát:*

$$\frac{\text{Procentní změmě potenciálního produktu}}{\text{Procentní změměvýrobního faktoru kapitál}} =$$

$$= \text{Marginální produktivita kapitálu} \cdot \frac{\text{Objem výrobního faktoru kapitál } \left(K\right)}{\text{Objem potenciálního produktu } \left(Y^*\right)} = w \qquad (7.72)$$

Zapišme upravenou verbální rovnici (7.72) v symbolech:

$$MPK = w \cdot \frac{Y^*}{K}, \qquad (7.72a)$$

kde Y/K je průměrná produktivita kapitálu. Tím jsme vyvinuli vztah mezi marginální produktivitou kapitálu a průměrnou produktivitou kapitálu.*

Analogickým postupem můžeme vyjádřit vztah mezi marginální produktivitou práce a průměrnou produktivitou práce, za předpokladu, že objem kapitálu zůstane nezměněn. Pro tento vztah můžeme psát:

$$MPN = (1-w)\cdot\frac{Y^*}{N}, \qquad (7.73)$$

kde Y/N je průměrná produktivita práce. Z rovnice (7.73) plyne, že marginální produktivita práce se rovná součinu parametru (*1 *- w) a průměrné produktivity práce Y*/N.*

Nyní již můžeme vyjádřit marginální míru technologické substituce (viz rovnici 7.68) - s ohledem na rovnice (7. 72a) a (7.73) - takto:

$$\Omega = \frac{\frac{\delta Y^*}{\delta N}}{\frac{\delta Y^*}{\delta K}} = \frac{(1-w)\cdot\frac{Y^*}{N}}{w\cdot\frac{Y^*}{K}} = \frac{(1-w)K}{wN} \qquad (7.74)$$

Nyní již jsme připravili podmínky, abychom mohli dosadit do obecného vzorce elasticity technologické substituce, tj. rovnice (7.69):

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{K}{N}\right):\frac{K}{N}}{\frac{(1-w)}{w}\cdot d\left(\frac{K}{N}\right)\cdot\frac{w}{(1-w)}\cdot\frac{N}{K}} = 1$$

$$\sigma = 1.$$

Cobb-Douglasova produkční funkce zakotvuje **jednotkovou elasticitu technologické substituce**, *tj. σ = 1. Ekonomicky budeme interpretovat elasticitu technologické substituce σ = 1 takto: vzroste-li marginální míra substituce (tj. přírůstek kapitálu na jednotku úspory výrobního faktoru práce) o 1 %, vzroste kapitálová intenzita (vybavenost) stejně, a to o 1%.*

9) Ukažte, že v Cobb-Douglasově produkční funkci (7.59) za předpokladu dokonalé konkurence představuje parametr *w* podíl zisku na produktu a parametr (1 - *w*) podíl mezd na produktu.

Řešení: Za předpokladu dokonalé konkurence jsou dány ceny výrobního faktoru kapitál a práce jejich marginálními produktivitami. Minimální výrobní náklady na daný objem potenciálního produktu (značíme Y^*_N) udává pro Cobb-Douglasovu produkční funkci následující „nákladová rovnice“, v níž je objem výrobního faktoru kapitál (K) násoben cenou kapitálu (tj. marginální produktivitou kapitálu) a objem pracovního inputu (N) je násoben cenou výrobního faktoru práce, tj. marginální produktivitou práce. Tedy

$$Y^*_N = \frac{\delta Y^*}{\delta K}\cdot K + \frac{\delta Y^*}{\delta N}\cdot N \qquad (7.75)$$

Do rovnice (7.75) dosadíme rovnici (7. 72a) a rovnici (7.73) a dostaneme

$$Y^*_N = w\cdot\frac{Y^*}{K}\cdot K + (1-w)\cdot\frac{Y^*}{N}\cdot N \qquad (7.76)$$

Z rovnice (7.76) plyne, že $Y^*_N = Y^*$ *(7.77)*
Znamená to, že Y^*_N *značí - za daného předpokladu - objem potenciálního produktu v cenách výrobních faktorů.*

Závěr: z rovnice (7.76) plyne, že ***w*** **značí podíl zisku (*R*) na potenciálním produktu (*Y**) a (1 - *w*) značí podíl mezd (odměn výrobního faktoru práce) na potenciálním produktu (*Y**).**

10) Ukažte, čím je v Cobb-Douglasově produkční funkci determinována - za předpokladu dokonalé konkurence - průměrná míra zisku, tj. R/K a čím je determinována průměrná (reálná) mzda (W/N).

V ad 9) jsme ukázali, že w se rovná podílu zisku na produktu. Lze proto zřejmě psát:

$$w = \frac{R}{Y^*} = \frac{R}{K} \cdot \frac{K}{Y^*} \qquad (7.78)$$

Z rovnice (7.78) plyne, že podíl zisku na produktu se rovná součinu míry zisku (R/K) a kapitálového koeficientu (K/Y).*
Z rovnice (7.53) plyne, že parametr w se rovná součinu marginální produktivity kapitálu a kapitálového koeficientu K/Y. Tedy*

$$w = \frac{\delta Y}{\delta K} \cdot \frac{K}{Y^*} \qquad \text{(viz 7.53)}$$

Vzhledem k tomu, že v rovnici (7.78) je na pravé straně součin míry zisku a kapitálového koeficientu a v rovnici (7.53) je na pravé straně součin marginální produktivity kapitálu a kapitálového koeficientu, pak z obou rovnice plyne, že průměrná míra zisku, tj. R/K se musí rovnat - za daných předpokladů marginální produktivitě kapitálu, tj. δY/δK. Učiníme tedy závěr, že* **průměrná míra zisku je determinována marginální produktivitou kapitálu**. *Tedy*

$$\frac{\delta Y^*}{\delta K} = \frac{R}{K} = \chi \qquad (7.79)$$

Analogicky povedeme argumentaci pro determinaci průměrné reálné mzdy. Z rovnice (7.54), resp. (7.56) plyne, že podíl mezd na produktu, tj. (1 - w) je dán - za předpokladu dokonalé konkurence - součinem marginální produktivity práce δY/δN a poměrem inputu práce k produktu, tj. N/Y*. Tedy*

$$(1 - w) = \frac{\delta Y^*}{\delta N} \cdot \frac{N}{Y^*} \qquad \text{(viz 7.54)}$$

Pro podíl mezd (W) na produktu (Y) můžeme zřejmě psát:*

$$(1 - w) = \frac{W}{N} \cdot \frac{N}{Y^*} \qquad (7.80)$$

Vzhledem k tomu, že v rovnici (7.54) je na pravé straně součin marginální produktivity práce s výrazem N/Y a v rovnici (7.80) je součin průměrné reálné mzdy (W/N) a výrazu N/Y*, potom obě rovnice implikují závěr, že průměrná mzda je determinována marginální produktivitou práce. Tedy*

$$\frac{W}{N} = \frac{\delta Y^*}{\delta N} \qquad (7.81)$$

Tím jsme ukázali, že průměrná mzda je za předpokladu dokonalé konkurence determinována marginální produktivitou práce.

11) Znázorněte graficky izokvanty pro hodnoty elasticit technologické substituce σ = 0, σ < 1, 0 < σ < 1, σ > 1 a σ = ∞.
Řešení je na obr. 7. 17.

Komentář k obr. 7. 17:
1) Při nulové hodnotě elasticity technologické substituce (σ = 0), tj. při fixních proporcích mezi kapitálem (K) a prací (N) je grafickým zobrazením tzv. rohová izokvanta s jediným efektivním bodem A (s jedinou efektivní kombinací kapitálu a práce, s jedinou efektivní technologií, resp. technikou).

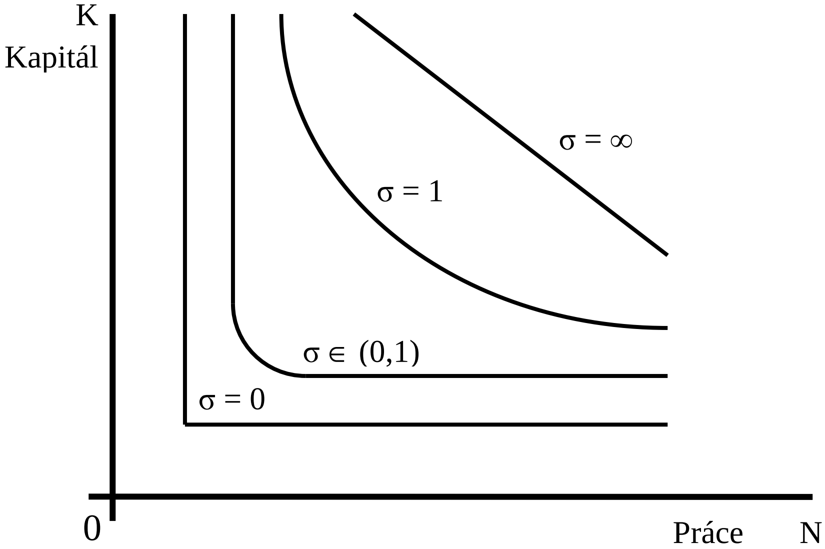
2) Na druhém pólu „spektra" hodnot elasticity technologické substituce je izokvanta ve tvaru přímky, jejíž elasticita technologické substituce σ = ∞: vyjadřuje neomezenou zaměnitelnost kapitálu (K) a práce (N).

3) Produkční izokvanta pro hodnotu elasticity technologické substituce σ = 1 je izokvantou Cobb-Douglasovy produkční funkce.

4) Na izokvantě s hodnotou elasticity substituce 0 < σ < 1 je relativně omezená substituce mezi kapitálem a prací; tato izokvanta je „zakřivenější" oproti izokvantě Cobb-Douglasově.

5) „Plošší" izokvanta než je izokvanta Cobb-Douglasova má hodnotu elasticity technologické substituce σ > 1.

Obr. 7. 17



Poznámka: podle velikosti hodnot elasticity substituce se rozdělují dvoufaktorové produkční funkce na
a) produkční funkce s konstantní elasticitou substituce, tzv. **CES funkce**, *tj. zobecněné produkční funkce, jež se neomezují jen na jednotkovou elasticitu technologické substituce,*
b) produkční funkce s variabilní elasticitou substituce, tzv. **VES funkce**.
Cobb-Douglasova produkční funkce ve tvaru

$$Y^* = b\, K^w \cdot N^{1-w}, \text{ kde } b > a\ w \in (0,1)$$

je speciálním případem CES funkce s elasticitou technologické substituce $\sigma = 1$.
CES a VES funkcemi, jakož i vícefaktorovými a dalšími třídami produkčních funkcí se v tomto kursu zabývat nebudeme.

12) Odvoďte tempo růstu potenciálního produktu (y^*) v Solowově modelu za předpokladu neutrálního technologického (technického) pokroku (připomeňme, že neutrální typ technologického pokroku předpokládá, že se nemění marginální míra technologické substituce).

Za výše uvedeného neutrálního typu technologického pokroku může být produkční funkce zapsána ve formě:

$$Y^*_t = \kappa_t F(K_t, N_t) \qquad \text{(viz 7.2)}$$

kde $F(K_t, N_t)$ je standardní neoklasická produkční funkce s konstantními výnosy z rozsahu. Jestliže koeficient κ_t měří kumulované účinky technologických změn (technologického pokroku) v čase t (a tedy vyvolává posun produkční funkce), potom můžeme psát:

$$\kappa_t = \kappa_0 \cdot e\Psi^t \qquad (7.82)$$

Nyní odvodíme výraz pro tempo růstu potenciálního produktu jako funkci inputů kapitálu a práce a míry technologického pokroku z rovnice (7.2), tj. z rovnice speciální produkční funkce. Nejdříve proto derivujeme rovnici (7.2) podle času a dostaneme

$$\frac{dY^*}{dt} = \frac{d\kappa}{dt} F(K,N) + \kappa \frac{\delta F}{\delta K} \cdot \frac{dK}{dt} + \kappa \frac{\delta F}{\delta N} \cdot \frac{dN}{dt} \qquad (7.83)$$

Vydělme rovnici (7.83) potenciálním produktem (Y) a násobme a dělme druhý člen na pravé straně rovnice (7.83) K, jakož i násobme a dělme třetí člen na pravé straně rovnice (7.83) L. Dostaneme*

$$\frac{\frac{dY^*}{dt}}{Y^*} = \frac{\frac{d\kappa}{dt} F(K,N)}{Y^*} + \kappa \frac{\delta F}{\delta K} \cdot \frac{1}{Y^*} \cdot \frac{dK}{dt} \cdot \frac{K}{K} + \kappa \frac{\delta F}{\delta N} \cdot \frac{1}{Y^*} \cdot \frac{dN}{dt} \cdot \frac{N}{N} \qquad (7.84)$$

Vzhledem k tomu, že $[(dY^*/dt)/Y^*] = y^*$, jmenovatel prvního členu rovnice (7.84) můžeme přepsat jako $\kappa \cdot F(K,N)$. Položme podle předpokladu neutrálního technologického pokroku, že

$$\kappa \frac{\delta F}{\delta K} = \frac{\delta Y^*}{\delta K} \qquad (7.85)$$

Z rovnice (7.85) plyne, že marginální produkt kapitálu (MPK) se rovná κ krát $\delta F/\delta K$.
Obdobně položme

$$\kappa \frac{\delta F}{\delta N} = \frac{Y^*}{N} \qquad (7.86)$$

Z rovnice (7.86) plyne, že marginální produkt práce (MPN) se rovná κ krát δF/δN. Připomeňme, že [(dK/dt)/K] = k a že [(dN/dt)/N] = n a položme

$$w = \frac{\delta Y^*}{\delta K} \cdot \frac{K}{Y^*} \qquad a \qquad (1-w) = \frac{\delta Y^*}{\delta N} \cdot \frac{N}{Y^*},$$

kde w je podíl nákladů kapitálu na produktu a (1 - w) je podíl nákladů práce na produktu (součet podílu kapitálu a práce na produktu je za předpokladu konstantních výnosů z rozsahu roven 1, výchozí produkční funkce je tedy homogenní prvního stupně).
S ohledem na výše uvedené předpoklady můžeme rovnici (7.84) přepsat takto:

$$\frac{\Delta Y^*}{Y^*} = \frac{\Delta\kappa}{\kappa} + w \cdot \frac{\Delta K}{K} + (1-w)\frac{\Delta N}{N}, \qquad \textit{(viz 7.16)}$$

resp. $$y^* = \Psi + w \cdot k + (1 - w) \cdot n. \qquad \textit{(viz 7.16d)}$$

Rovnice (7.16) a (7. 16d) jsou základní rovnice růstového účetnictví uvedené v části 7.1. Pro tempo růstu technologického pokroku v čase t můžeme tedy psát:

$$\Psi = y^* - w \cdot k - (1 - w) \cdot n. \qquad \textit{(viz 7.17)}$$